EIN VERFAHREN ZUR UNTERSUCHUNG DES EINFLUSSES DER PHYSIK DER PLANETARISCHEN GRENZSCHICHT AUF DIE AUSBREITUNG VON LUFTBEIMENGUNGEN

INAUGURALDISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs 24 Geowissenschaften

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Bernd Gutsche

aus Berlin

1973

EIN VERFAHREN ZUR UNTERSUCHUNG DES EINFLUSSES DER PHYSIK DER PLANETARISCHEN GRENZSCHICHT AUF DIE AUSBREITUNG VON LUFTBEIMENGUNGEN

INAUGURALDISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs 24 Geowissenschaften

der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Bernd Gutsche

aus Berlin

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Referent: Prof. Dr. H. Fortak

2. Referent: Prof. Dr. F. Wippermann

Tag der mündlichen Prüfung: 1o. 7. 1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552710_0102

ZUSAMMENFASSUNG

Die Lösung zahlreicher Aufgabenstellungen auf dem Gebiet der Luftreinhaltung erfordert die Berücksichtigung der meteorologischen Struktur der planetarischen Grenzschicht und der Topographie des Ausbreitungsbereiches der Luftbeimengungen, ein Gesichtspunkt, dem in bestehenden Diffusionsmodellen nur in unzureichendem Maße Rechnung getragen wird. Als ein erster Ansatz zur Überwindung dieser Schwierigkeiten wird ein Trajektorienverfahren entwickelt, bei dem eine Rauchfahne durch eine Summe von 'sub-Rauchfahnen' mit jeweils individuellen Werten für die Einflußgrößen dargestellt wird. Dadurch ist dieses Verfahren offen gegenüber zeitlichen und räumlichen Änderungen der meteorologischen Parameter und der regionalen Faktoren. Durch die Verwendung einer Superposition GAUSSscher Verteilungen werden Rechenzeit und Speicherplatzbedarf in einem für die praktische Handhabung eines Diffusionsmodells vertretbaren Rahmen gehalten.

Die Anwendung dieser Methode auf Dispersionsprozesse in zum Teil recht kompliziert strukturierten Grenzschichten bringt Resultate, die die aus der Kenntnis der jeweiligen Struktur der Grenzschicht heraus zu erwartenden Effekte richtig wiedergeben.

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINLEITUNG 1

2. EIN VERFAHREN ZUR BERECHNUNG DER DISPERSION VON LUFTBEIMENGUNGEN IN EINER STRUKTURIERTEN AUSBREITUNGSSCHICHT 3

2.1 Die Diffusionsgleichung und ihre Lösung für homogene Ausbreitungsverhältnisse 3
2.2 Die Dispersion von Luftbeimengungen unter komplexeren Ausbreitungsbedingungen 5
2.3 Beschreibung eines Trajektorienverfahrens zur Behandlung der Dispersion von Luftbeimengungen in einer strukturierten Ausbreitungsschicht 7
2.3.1 Darlegung der Methode 7
2.3.2 Mathematische Beschreibung des Verfahrens 8
2.3.3 Bestimmung adäquater Dispersionsparameter 16

3. ANWENDUNG DES VORGESCHLAGENEN VERFAHRENS ZUR UNTERSUCHUNG DES EINFLUSSES SPEZIELLER ASPEKTE DER PHYSIK DER PLANETARISCHEN GRENZSCHICHT AUF DIE AUSBREITUNG VON LUFTBEIMENGUNGEN 23

3.1 Der Einfluß der vertikalen Struktur des Windfeldes in der planetarischen Grenzschicht auf die Ausbreitung von Luftbeimengungen 24
3.1.1 Vertikales Windprofil in Form eines Potenzgesetzes 24
3.1.2 Das EKMANsche Windfeld 28
3.1.3 Die ELLISONsche Lösung für ein Windfeld in der planetarischen Grenzschicht unter Berücksichtigung eines höhenabhängigen Austauschkoeffizienten und eines höhenabhängigen geostrophischen Windes 36
3.1.4 Vorgabe real gemessener Windprofile 46
3.2 Der Einfluß vertikaler Änderungen der Stabilität der atmosphärischen Schichtung auf die Ausbreitung von Luftbeimengungen 46

4. SCHLUSSFOLGERUNGEN UND AUSBLICK 5o

LITERATURVERZEICHNIS 52

1. EINLEITUNG

Die Ergebnisse bestehender Ausbreitungsmodelle für Stadtgebiete und der damit verbundene Nachweis ihrer Funktionsfähigkeit und Aussagekraft - insbesondere für Planungs- und Raumordnungszwecke - hatten zur Folge, daß an sie wesentlich erweiterte Fragestellungen für komplexere Situationen herangetragen wurden und die Möglichkeiten dieser Modelle schließlich hinter den neu formulierten Aufgaben und Erwartungen zurückblieben (MAHONEY (197o)). Die Untersuchung der Ursache für diese Diskrepanz führt zugleich zur Formulierung eines Leitgedankens für die derzeitigen Tendenzen und Bemühungen, die sich bei der Entwicklung neuer Ausbreitungsmodelle abzeichnen und die ihren ersten nachhaltigen Ausdruck auf dem 'Symposium on Multiple-Source Urban Diffusion Models' in Research Triangle Park (STERN (197o)) fanden:

> Komplexere Problemstellungen erfordern eine detaillierte Einarbeitung meteorologisch relevanter Faktoren und eine explizite Berücksichtigung regionaler Daten durch neue physikalische Konzepte.

In den ersten publizierten Diffusionsmodellen wurde die Ausbreitung von Luftbeimengungen im Lee einer Quelle durch einen einfachen GAUSSschen plume beschrieben. Dabei wurde regionalen Daten (wie der Topographie des Erdbodens, lokalen Rauhigkeitselementen oder dgl.) gewöhnlich gar nicht Rechnung getragen, und meteorologische Faktoren wurden nur insofern einbezogen, als durch ihre Werte am Quellort selbst oder an einem als repräsentativ erachteten Bezugspunkt die Ausrichtung und die Dimensionen der Rauchfahne im gesamten Ausbreitungsbereich festgelegt wurden. Eine kontinuierliche Veränderung der Konzentrationsverteilung unter dem Einfluß sich zeitlich und räumlich ändernder meteorologischer Bedingungen und durch die Wirkung regionaler Faktoren ist in diesen Modellen nicht zulässig. Das alles sind Vorstellungen, die einer Konkretisierung und Realisierung des erweiterten Aufgabenkatalogs entgegenstehen.

Es muß daher die Intention neu zu entwickelnder Modelle sein, der veränderten Problematik gerecht zu werden, zumal im Rahmen groß angelegter Luftreinhaltungsprogramme heutzutage oftmals der zu diesem Zweck benötigte Satz an meteorologischen und regionalen Daten sowie die zur Modellverifikation erforderlichen Konzentrationsmessungen bereitgestellt werden können.

Mit dieser Forderung nach einer verfeinerten Modellstruktur einher geht die Frage nach dem erforderlichen Grad der Auflösung der Ausbreitungsschicht in ihre Feinstruktur: Welche Detailkenntnisse dieser Feinstruktur sind tatsächlich notwendig? Oder präziser formuliert: Welche scales der atmosphärischen Prozesse sind für die Ausbreitung von Luftbeimengungen in einem Stadtgebiet von entscheidender Bedeutung? Antworten vermag nur eine Sensitivitätsanalyse der zugehörigen Einflußgrößen zu geben; doch das setzt wiederum die Existenz adäquater physikalischer Konzeptionen für Diffusionsmodelle voraus, die flexibel genug sind, solche Problemstellungen anzugreifen.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein einfaches physikalisches Konzept zu

entwickeln, das zu einer ersten Klärung dieser anstehenden Fragen beizutragen vermag. Kriterien für die Einarbeitung eines solchen Instrumentariums sollen sein:

1.) das Offen-sein gegenüber zeitlichen und räumlichen Änderungen der meteorologischen und regionalen Einflußgrößen;
2.) die Anwendbarkeit in Ausbreitungsmodellen mit einem vertretbaren Aufwand an Rechenzeit und Speicherplatzbedarf.

Der zweite Aspekt legt die Verwendung von GAUSSschen Verteilungen oder von Superpositionen davon nahe, die sich für die numerische Behandlung als so angenehm erwiesen haben; der erste Punkt impliziert die Notwendigkeit, Raum-Zeit-Trajektorien unter sich ändernden meteorologischen Verhältnissen und topographischen Gegebenheiten zu verfolgen. Beiden Gesichtspunkten entgegen kommt ein spezielles, verfeinertes Trajektorienverfahren, bei dem eine horizontale und vertikale Variation aller Einflußgrössen zugelassen wird. Eine Rauchfahne wird dazu dargestellt durch eine Summe von GAUSSschen 'sub-Rauchfahnen', bei denen die Einflußgrößen jeweils individuelle Werte annehmen, die für die lokale Situation spezifisch sind. Eine eingehende Beschreibung dieses Verfahrens wird in Kapitel 2. gegeben; dabei wird die Durchführung insbesondere am Beispiel eines GAUSSschen plume erläutert, obwohl sich alle Schritte des Vorgehens analog für einen puff formulieren lassen. Da Trajektorienverfahren für eine horizontale Änderung der Parameter bereits in der Literatur diskutiert wurden, wird in Kapitel 3. speziell auf eine Anwendung des Verfahrens auf Situationen mit zum Teil recht komplizierten vertikalen Änderungen in der Struktur der planetarischen Grenzschicht eingegangen.

2. EIN TRAJEKTORIENVERFAHREN ZUR BERECHNUNG DER DISPERSION VON LUFTBEIMENGUNGEN IN EINER STRUKTURIERTEN AUSBREITUNGSSCHICHT

2.1 Die Diffusionsgleichung und ihre Lösung für homogene Ausbreitungsverhältnisse

Die Ausbreitung physikalisch und chemisch stabiler, nichtsedimentierender Luftbeimengungen läßt sich in der Theorie der turbulenten Diffusion beschreiben durch die Gleichung*

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial t} + \hat{\vec{v}} \cdot \nabla \hat{s} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial \hat{s}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial \hat{s}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial \hat{s}}{\partial z}\right), \qquad (2\text{-}1)$$

in der K_i ($i = x,y,z$) die Diagonalelemente eines orthotropen Austauschtensors bedeuten. Unter der konventionellen Annahme einer horizontalen, stationären mittleren Luftströmung in x-Richtung (mit der x-Komponente $\hat{u}$), bei der der konvektive Transport in x-Richtung sehr viel größer ist als der entsprechende turbulente Transport** nimmt die Diffusionsgleichung die Form

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{s}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial \hat{s}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial \hat{s}}{\partial z}\right) \qquad (2\text{-}2)$$

an. Im Falle Nicht-FICKscher Diffusion mit lediglich von der Reisezeit $\tau = x/\hat{u}$ abhängigen Diffusionskoeffizienten K_i lassen sich diese über die TAYLORsche Relation $K_i = \frac{1}{2}\frac{d\sigma_i^2}{d\tau}$ in Beziehung setzen zu den Varianzen σ_y^2 und σ_z^2, die definiert sind durch das mittlere Quadrat der von den Partikeln diffusiv in y- bzw. z-Richtung zurückgelegten Entfernungen. Das Grenzverhalten dieser Varianzen ist gegeben durch $\sigma_y^2, \sigma_z^2 \to o$ für $\tau \to o$.

Es werde eine kontinuierliche Punktquelle am Orte (o, o, H_e) betrachtet; als zugehörige Randbedingungen zur Lösung der Gleichung (2-2) mögen für alle $x > o$ gelten

$$\begin{aligned} &\hat{s} \to \infty \quad \text{für} \quad (x,y,z) \to (o,o,H_e), \\ &\hat{s} \to o \quad \text{für} \quad x, |y| \to \infty, \\ &\lim_{z \to o}\left(K_z \frac{\partial \hat{s}}{\partial z}\right) = o, \qquad \lim_{z \to H_I}\left(K_z \frac{\partial \hat{s}}{\partial z}\right) = o. \end{aligned} \qquad (2\text{-}3)$$

Die beiden letzten Bedingungen in (2-3) schränken die vertikale Ausbreitung der Luftbeimengungen auf einen durch den Erdboden einerseits und durch eine sperrende Inversion in der Höhe H_I andererseits begrenzten Bereich ein. In ihnen kommt zum Ausdruck, daß an diesen beiden Grenzflächen

---

* Als Mittelungssymbole werden in konventioneller Schreibweise das arithmetische REYNOLDsche Mittel ($\bar{}$) und das mit der Dichte gewogene HESSELBERGsche Mittel ($\hat{}$) verwandt.

** Diese Voraussetzung ist außer in extrem windschwachen Situationen ($\hat{u} < 1$ m/sec) gewöhnlich gut erfüllt.

keine Absorption von Luftbeimengungen erfolgt. Sie sollen vielmehr wie ideale Reflektoren wirken, d.h. der vertikale turbulente Fluß an Luftbeimengungen soll an diesen Grenzflächen verschwinden. Das wird erreicht durch eine wiederholte Anwendung der Spiegelungsmethode (siehe z. B. McCORMICK, GUTSCHE (1969)).

Unter diesen Bedingungen gewinnt man mit der Kontinuitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{0}^{H_I} dz\, \hat{u}\, \hat{s}(x,y,z) = Q \qquad \text{für alle } x > 0\,, \tag{2-4}$$

durch die die Erhaltung der pro Zeiteinheit von der Quelle emittierten Gesamtmasse Q in der Ausbreitungsschicht gewährleistet wird, die folgende Lösung der Gleichung (2-2) für die Ausbreitung von Luftbeimengungen aus einer kontinuierlichen Punktquelle (FORTAK (1969))

$$\hat{s}(x,y,z) = \frac{Q}{\hat{u}} R(x,y,z;\, o,o,H_e;\, H_I). \tag{2-5}$$

Hierin kennzeichnet der universelle Formfaktor

$$R(x,y,z;\, o,o,H_e;\, H_I) = E[y/\sigma_y(\tau)] \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Big\{ E[z - H_e + 2nH_I/\sigma_z(\tau)] + E[z + H_e + 2nH_I/\sigma_z(\tau)] \Big\}\,, \tag{2-6}$$

in dem

$$E[\alpha/\sigma] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right)$$

eine GAUSSsche Verteilung mit der Standardabweichung σ bedeutet, die Gestalt der Konzentrationsverteilung; der Faktor $Q/\hat{u}$ bestimmt die Intensität der Konzentration.

Für $x = o$, $y = o$ repräsentieren die Stellen

$$z = -H_e\,; \qquad \pm (H_e + 2nH_I) \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$$

die Positionen der bei der wiederholten Anwendung der Spiegelungsmethode benutzten virtuellen Punktquellen.

In dieser bei Ausbreitungsrechnungen allgemein verwendeten Lösung (bzw. Superposition von GAUSSschen Verteilungen) wird topographischen Gegebenheiten gar nicht Rechnung getragen, und meteorologische Faktoren werden nur insofern einbezogen, als durch ihre Werte am Quellort selbst oder an einem als repräsentativ erachteten Bezugspunkt die Ausrichtung und die Dimensionen der Rauchfahne im gesamten Ausbreitungsbereich festgelegt werden. Das durch diese Lösung der Diffusionsgleichung vermittelte Bild wird impliziert durch die konventionellen Stationaritäts- und Homogenitätsannahmen, Bedingungen, die in mathematisch-meteorologischen Diffusionsmodellen nur für Stadtgebiete mit relativ geringer Ausdehnung auf ebenem Gelände hinreichende Gültigkeit besitzen.

2.2 Die Dispersion von Luftbeimengungen unter komplexeren Ausbreitungsbedingungen

Für größere Städte hingegen, bei denen die Verweilzeit emittierter Luftbeimengungen über dem Stadtgebiet im Bereich mehrerer Stunden liegt, und für Städte auf unebenem Gelände erlangen die zeitlichen und räumlichen Veränderungen der meteorologischen Einflußgrößen Bedeutung, und die Dispersionseigenschaften jeder Partikel werden wesentlich durch die lokalen Werte dieser Parameter am jeweiligen Aufenthaltsort der Partikel bestimmt. Das ist unmittelbar einsichtig z. B. beim Vorhandensein lokaler Zirkulationssysteme, bei plötzlichen Rauhigkeitsänderungen oder bei lokalen rain- oder washout-Vorgängen und ähnlichen Prozessen, die allesamt unabhängig sind oder zumindest sein können von den Ausbreitungsbedingungen am Quellort.

Weiterhin ist entsprechend zu erwarten, daß die natürlicherweise vorhandene vertikale Strukturierung der Ausbreitungsschicht Auswirkungen auf die Konzentrationsverteilung von Luftbeimengungen zeitigt, indem sie die oben zugrundegelegte Homogenitätsbedingung zusätzlich in Frage stellt.

Alle diese Gesichtspunkte können bei der Verwendung der Lösung (2-5) keine direkte Berücksichtigung finden.

Zur Überwindung der mit zeitlichen Veränderungen und horizontalen Inhomogenitäten im Ausbreitungsbereich verbundenen Schwierigkeiten wird in einer Gruppe von Diffusionsmodellen mit integrierten GAUSSschen puffs und einem Trajektorienverfahren mit stückweise konstanten Parametern gearbeitet (ROBERTS et al. (197o), SHIEH et al. (197o)). Durch die zeitliche Integration einer Serie von momentanen Emissionen mit jeweils verschiedenen Trajektorien und verschiedenen Diffusionsraten soll gegenüber einem reinen plume-Modell etwas an Flexibilität hinsichtlich der Einbeziehung von Instationaritäten und horizontalen Inhomogenitäten in der Ausbreitungsschicht gewonnen werden.

Während durch diese Bemühungen einige Ansatzpunkte zur Bewältigung der durch Instationaritäten und durch horizontale Inhomogenitäten aufgeworfenen Fragestellungen erzielt wurden, sind die durch die vertikale Strukturierung der Ausbreitungsschicht in die Theorie der turbulenten Diffusion eingebrachten Schwierigkeiten so komplexer Natur, daß sie in der Literatur bislang nur vereinzelt und mit eng begrenzter Problemstellung angegangen wurden.

Auf diesem Sektor werden insbesondere Fragestellungen vom folgenden Typus aufgeworfen:

1. zum vertikalen Windprofil
   - 1.1 die Ausbreitung von Luftbeimengungen beim Vorhandensein einer Windscherung und einer Winddrehung mit der Höhe (Beispiel: EKMANsche Windspirale, thermischer Wind in einer baroklinen Grenzschicht);
   - 1.2 die Berücksichtigung lokaler Zirkulationssysteme in einem suburbanen scale (Beispiel: die durch den Wärmeinseleffekt aufgeprägte Windverteilung in einem Stadtgebiet; die small-scale Zirkulation in einem Straßenzug);

1.3 der Effekt von Rauhigkeitsänderungen und orographischen Faktoren auf die Form einer Rauchfahne (Beispiel: Über- und Umströmung natürlicher und künstlicher Hindernisse);

2. zur vertikalen Verteilung der atmosphärischen Stabilität

2.1 die Wirkung der Höhenabhängigkeit meteorologischer Parameter auf die verschiedenen Teile einer Rauchfahne (Beispiel: fumigation- oder lofting-Situationen);

2.2 die durch stark instationäre Vorgänge hervorgerufenen rapiden Änderungen der vertikalen atmosphärischen Schichtung (Beispiel: die Situationen nach Sonnenauf- bzw. -untergang, Frontdurchgang);

2.3 die durch den Wärmeinseleffekt bewirkte thermische Strukturierung der Mischungsschicht über einer Stadt.

Prinzipiell existieren für derartige Probleme drei Kategorien von Lösungsmöglichkeiten:

(I) die numerische Lösung der Differentialgleichung für die turbulente Ausbreitung von Luftbeimengungen

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial t} + \hat{w} \cdot \nabla \hat{s} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial \hat{s}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial \hat{s}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial \hat{s}}{\partial z}\right)$$

mit adäquaten Anfangs- und Randbedingungen und unter Verwendung eines entsprechenden, die vertikale Struktur der Ausbreitungsschicht charakterisierenden Satzes an meteorologischen Parametern;

(II) die analytische Lösung dieser Differentialgleichung für eine Reihe spezifischer Situationen;

(III) die Durchführung von Modellexperimenten in Windtunneln.

Alle drei Lösungsansätze sind durch eine Anzahl gravierender Schwierigkeiten in ihrer Anwendbarkeit eingeschränkt.

Die numerische Lösung der Diffusionsgleichung mit Hilfe eines Differenzenverfahrens ist bei dem Komplexitätsgrad der anstehenden Probleme mit einem enormen Aufwand an Rechenzeit und Speicherbedarf verbunden. Zusätzliche Schwierigkeiten bereiten die numerischen Stabilitätskriterien bei der getrennten Behandlung des Strömungs- und des Konzentrationsfeldes. Erste Ergebnisse solcher Rechnungen bietet die Arbeit von HINO (1968); und auch das Vorgehen von YOSHIKAWA (1972) ist als ein Schritt in dieser Richtung zu verstehen.

Durch die zweite Kategorie kann der genannte Fragenkatalog bislang nicht einmal annähernd abgedeckt werden, weil analytische Lösungen der Diffusionsgleichung nur für einen verschwindend kleinen Teil der Problemkreise bekannt sind.

Die Verläßlichkeit der Aussagen von Windtunnel-Experimenten wird vornehmlich aus zwei Gründen in Frage gestellt:

a) wegen der bei Windtunnel-Experimenten im Vergleich zur Atmosphäre viel zu geringen lateralen Diffusion;

b) wegen der ungenügenden Klärung des Skalierungs-Problems bei Diffusionsexperimenten in einem Windtunnel.

Wir wollen im folgenden ein Verfahren vorschlagen, das - unter Umgehung der Schwierigkeiten bei den Kategorien (I) und (II) - eine Rauchfahne

darstellt durch eine Summe von individuellen 'sub-Rauchfahnen', denen unterschiedliche Werte der meteorologischen Parameter zugeordnet werden können. Es ist demnach als ein spezielles, verfeinertes Trajektorienverfahren aufzufassen, bei dem eine vertikale Variation aller Einflußgrößen zugelassen ist.

2.3 Beschreibung eines Trajektorienverfahrens zur Behandlung der Dispersion von Luftbeimengungen in einer strukturierten Ausbreitungsschicht

2.3.1 Darlegung der Methode

Jedes Volumenelement der Ausbreitungsschicht ist durch einen, durch die jeweilige Lösung des behandelten Problems in eindeutiger Weise festgelegten Konzentrationswert gekennzeichnet, und jede Luftbeimengungspartikel in diesem Volumenelement wird durch den mittleren Transportvektor und durch turbulente Diffusion in der Zeiteinheit ein Stück weiterbefördert. Betrachten wir einen vertikalen Schnitt $F_{\ddot{a}}^{(1)}$ durch die gesamte Ausbreitungsschicht orthogonal zur mittleren Ausbreitungsrichtung x, so können wir davon ausgehen, daß jede Luftbeimengungspartikel, die von der ursprünglichen Quelle emittiert wurde, unter der Annahme totaler Reflexion am Erdboden und an einer Inversionsschicht irgendwann einmal diese Fläche durchsetzt. Aus dieser Überlegung resultiert als Ansatz zur Formulierung eines speziellen Trajektorienverfahrens die Annahme,

> daß das Konzentrationsfeld auf der Leeseite der Fläche $F_{\ddot{a}}^{(1)}$, das durch die Lösung der Diffusionsgleichung für die ursprüngliche Quelle erzeugt wurde, in gleicher Weise - unter Wahrung der Kontinuitätsbedingung (2-4) - erhalten werden kann, wenn man hinreichend kleine Elemente der Fläche $F_{\ddot{a}}^{(1)}$ als neue fiktive Flächenquellen ansieht mit einer Quellstärke, die dem Konzentrationsdurchsatz durch dieses Flächenelement pro Zeiteinheit entspricht.

Das heißt: die ursprüngliche Rauchfahne (z. B. der GAUSSsche plume) wird aufgelöst in eine Vielzahl von 'sub-Rauchfahnen'. Dadurch daß man das Ausbreitungsproblem nun von einer einzelnen Quelle am Orte (o, o, H_e) verlagert hat auf beliebig viele fiktive Quellen in der Fläche $F_{\ddot{a}}^{(1)}$, können nun die relevanten meteorologischen Parameter entsprechend der horizontalen und vertikalen Struktur der Ausbreitungsschicht für diese diversen Quellen individuell angesetzt werden; dies gilt speziell auch für die Höhenabhängigkeit der meteorologischen Variablen. Durch eine mehrfache Anwendung des Verfahrens an verschiedenen, aufeinanderfolgenden Referenzflächen $F_{\ddot{a}}^{(i)}$ wird eine weitgehende Anpassung an die Dispersionsbedingungen in einer strukturierten Ausbreitungsschicht ermöglicht.

Es ergeben sich zwei Teilprobleme: zum einen die Behandlung einer Flächenquelle, zum anderen die Abhängigkeit der Dispersionsparameter

von der Reisezeit der Beimengungspartikel. Der letzte dieser beiden Punkte wird im Kapitel 2.3.3 gesondert behandelt, zur Lösung des ersten Punktes werden die Flächenquellen für hinreichend kleine Flächenelemente durch Punktquellen im Zentrum des Flächenelements dargestellt. Für Flächenelemente mit unterschiedlichen Kantenlängen von jeweils weniger als 25 m (bei unseren Rechnungen wurde häufig ein Wert von 10 m verwendet) ist der durch diese Darstellung verursachte Fehler als gering einzuschätzen.

Diese beiden Teilprobleme sowie die Vereinfachung, die in der Natur dieses Trajektorienverfahrens begründet ist, sind die Ursachen dafür, daß die Ergebnisse der Rechnungen zunächst als Tendenzabschätzungen zu verstehen sind. Auf die Schlußfolgerungen und Forderungen, die daraus erwachsen, wird am Ende dieser Arbeit eingegangen.

2.3.2 Mathematische Beschreibung des Verfahrens.

Zur Verdeutlichung der Möglichkeiten dieser Methode sei im folgenden eine Anwendung auf einen GAUSSschen plume diskutiert, obwohl sich alle Schritte des Vorgehens auch analog für einen puff formulieren lassen.

Die allgemeine Lösung der Diffusionsgleichung (2-2) schreibt sich dann in der Form

$$\hat{s}(x,y,z) = \frac{Q}{\hat{u}} R(x,y,z;x_o,y_o,H_e;H_I) \quad \text{für } \hat{u} > o \,, \tag{3-1}$$

wobei sich die Formfunktion R unter den jeweiligen Bedingungen als GAUSSsche Verteilung oder als Superposition von GAUSSschen Verteilungen interpretieren läßt.

Der Durchsatz der von dieser Quelle emittierten Luftbeimengungen durch ein Flächenelement $\Delta y \cdot \Delta z$, zentriert um den Punkt $(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_o, z_o)$ in der Schnittfläche $F_{\ddot{a}}^{(1)}$, und damit die Quellstärke $Q_{el}^{(1)}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_o, z_o)$ dieses Flächenelements, läßt sich, von der Kontinuitätsgleichung am Orte $x_{\ddot{a}}^{(1)}$ ausgehend, berechnen zu

$$\begin{aligned} Q_{el}^{(1)}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_o, z_o) &= \int_{y_o-\frac{\Delta y}{2}}^{y_o+\frac{\Delta y}{2}} dy \int_{z_o-\frac{\Delta z}{2}}^{z_o+\frac{\Delta z}{2}} dz\, \hat{u}\, \hat{s}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y, z) \\ &= \int_{y_o-\frac{\Delta y}{2}}^{y_o+\frac{\Delta y}{2}} dy \int_{z_o-\frac{\Delta z}{2}}^{z_o+\frac{\Delta z}{2}} dz\, Q R(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y, z; o, o, H_e; H_I) \,. \end{aligned} \tag{3-2}$$

Für den Fall eines GAUSSschen plumes aus einer kontinuierlichen Punktquelle am Orte (o,o,H_e) nimmt diese Beziehung unter der Annahme totaler Reflexion der Luftbeimengungen am Erdboden und an einer sperrenden Inversion in der Höhe H_I die folgende Gestalt an:

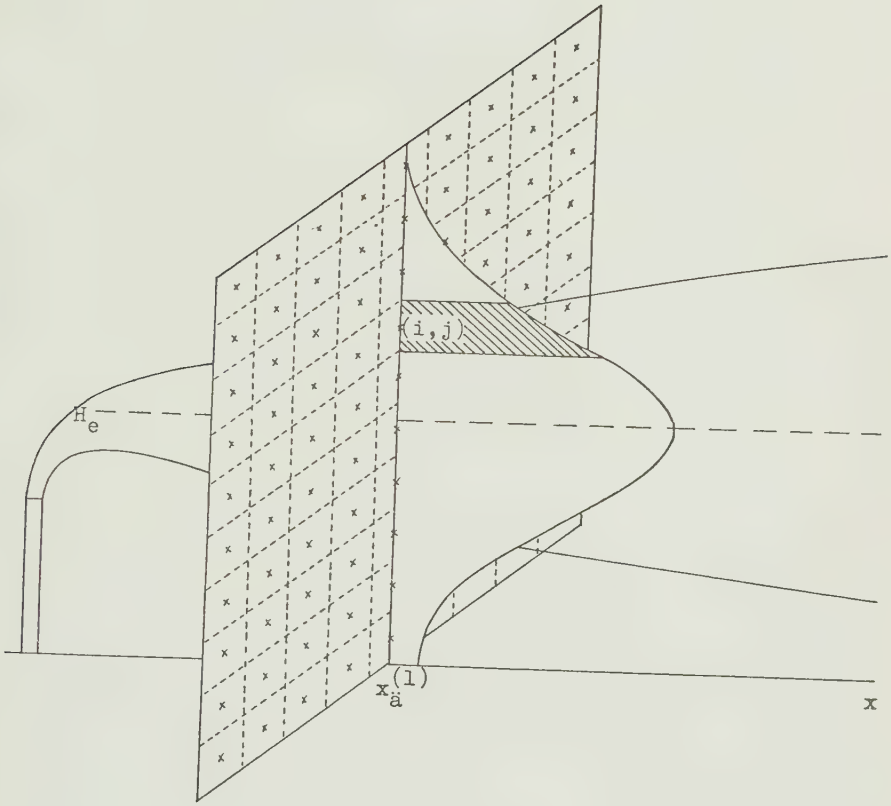


Abb. 1: Darstellung des Feldes der Elementarquellen und graphische Skizzierung des Integrationsprinzips zur Berechnung der Quellstärke der Elementarquelle (i,j) (hier ist nur der z-Anteil angedeutet).

$$Q_{el}^{(1)}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_o, z_o) = \frac{Q}{2\pi\sigma_y(x_{\ddot{a}}^{(1)})\,\sigma_z(x_{\ddot{a}}^{(1)})} \int_{y_o-\frac{\Delta y}{2}}^{y_o+\frac{\Delta y}{2}} dy \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2(x_{\ddot{a}}^{(1)})}\right) \cdot$$

$$\cdot \int_{z_o-\frac{\Delta z}{2}}^{z_o+\frac{\Delta z}{2}} dz \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{(z - H_e + 2nH_I)^2}{2\sigma_z^2(x_{\ddot{a}}^{(1)})}\right) + \right. \tag{3-3}$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{(z + H_e + 2nH_I)^2}{2\sigma_z^2(x_{\ddot{a}}^{(1)})}\right) \right\} ,$$

die für $H_I = o$ auch den einfacheren Fall lediglich am Erdboden reflektierter Luftbeimengungen in sich birgt.

Die Integrationen in Gl. (3-3) lassen sich leicht vollziehen, wenn man die Substitutionen

$$t = \frac{y}{\sigma_y} ;$$

$$v_n = \frac{(z - H_e + 2nH_I)}{\sigma_z} ;$$

$$w_n = \frac{(z + H_e + 2nH_I)}{\sigma_z}$$

verwendet. Wir erhalten in

$$Q_{el}^{(1)}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_o, z_o) = \frac{Q}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \exp(-t^2/2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{v_{n_1}}^{v_{n_2}} dv_n \exp(-v_n^2/2) + \right.$$

$$\left. + \int_{w_{n_1}}^{w_{n_2}} dw_n \exp(-w_n^2/2) \right\} \tag{3-4}$$

eine Darstellung, die eine einfache Ermittlung der Quellstärke $Q_{el}^{(1)}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_o, z_o)$ des Flächenelements $\Delta y \cdot \Delta z$ unter Zuhilfenahme der Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_o^z \exp(-t^2)\, dt$$

gestattet. Der Wert dieser Quellstärke wird dann - bei hinreichend kleinen Flächenelementen - einer Punktquelle im Zentrum $(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_o, z_o)$ des

Flächenelements zugeordnet; für diese Quellen sei im folgenden in Analogie zu Bezeichnungsweisen auf dem Gebiet der Optik der Name 'Elementarquelle' verwandt.

Eine einfachere und genauere Durchführung der Berechnungen mit einem geringeren Speicherbedarf, als es die tabellarische Abspeicherung der Fehlerfunktion erfordern würde, ermöglicht die folgende Reihenentwicklung um einen Punkt t_o des Integrationsintervalls:

$$\int_{t_1}^{t_2} \exp(-t^2/2)\,dt = \exp(-t_o^2/2)\left\{ t_2 - t_1 - \frac{t_o}{2}(\delta_{2o}^2 - \delta_{1o}^2) + \right.$$

$$+ \frac{(t_o^2 - 1)}{6}(\delta_{2o}^3 - \delta_{1o}^3) + \frac{(3t_o - t_o^3)}{24}(\delta_{2o}^4 - \delta_{1o}^4) +$$

$$+ \frac{(3 - 6t_o^2 + t_o^4)}{120}(\delta_{2o}^5 - \delta_{1o}^5) + \frac{(-15t_o + 10t_o^3 - t_o^5)}{720}(\delta_{2o}^6 - \delta_{1o}^6) +$$

$$\left. + \frac{(-15 + 45t_o^2 - 15t_o^4 + t_o^6)}{5040}(\delta_{2o}^7 - \delta_{1o}^7) + \ldots\ldots\right\} \qquad (3\text{-}5)$$

mit $\delta_{2o} = t_2 - t_1$ und $\delta_{1o} = t_1 - t_o$.

Wählt man als Referenzpunkt t_o der Reihenentwicklung den Zentralwert des Integrationsintervalls, so fallen alle Terme mit geraden Potenzen von δ_{1o} und δ_{2o} fort, und die Reihenentwicklung vereinfacht sich beträchtlich. Das Konvergenzverhalten der Reihenentwicklung ist so ausgezeichnet, daß die siebte Ordnung im gesamten Bereich praktisch keine nennenswerten Beiträge zum Integral mehr leistet. Diese Reihenentwicklung wurde getestet an tabellarisch publizierten Werten für die Fehlerfunktion.

Sei im folgenden in der Schnittfläche $F_{\tilde{a}}^{(1)}$ am Orte $x_{\tilde{a}}^{(1)}$ eine Matrix von Quellpunkten $(x_{\tilde{a}}^{(1)}, y_i, z_j)$ vorgegeben, denen die Quellstärken $Q_{el}^{(1)}(x_{\tilde{a}}^{(1)}, y_i, z_j)$ zugeordnet seien. Das von diesen Quellen im Raume $x' > x_{\tilde{a}}^{(1)}$ erzeugte Konzentrationsfeld läßt sich nach der Formel

$$\hat{s}(x', y', z',) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{jH_I} \frac{Q_{el}^{(1)}(x_{\tilde{a}}^{(1)}, y_i, z_j)}{\hat{u}(x_{\tilde{a}}^{(1)}, z_j)} R(x' - x_{\tilde{a}}^{(1)}, y', z'; x_{\tilde{a}}^{(1)}, y_i, z_j; H_I) \qquad (3\text{-}6)$$

$$\text{für } x' > x_{\tilde{a}}^{(1)}$$

berechnen, die für den Fall eines GAUSSschen plumes die Form

$$\hat{s}(x',y',z') = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_I}} \frac{Q_{el}^{(1)}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_i, z_j)}{2\pi\, \hat{u}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)\, \sigma'_y(x' - x_{\ddot{a}}^{(1)}; z_j)\, \sigma'_z(x' - x_{\ddot{a}}^{(1)}; z_j)}$$

(3-6a)
$$\exp\Big(-\frac{(y' - y_i)^2}{2\sigma'^2_y(x' - x_{\ddot{a}}^{(1)}; z_j)}\Big) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big\{\exp\Big(-\frac{(z' - z_j + 2nH_I)^2}{2\sigma'^2_z(x' - x_{\ddot{a}}^{(1)}; z_j)}\Big) + \exp\Big(-\frac{(z' + z_j + 2nH_I)^2}{2\sigma'^2_z(x' - x_{\ddot{a}}^{(1)}; z_j)}\Big)\Big\} \quad \text{für } x' > x_{\ddot{a}}^{(1)}$$

annimmt mit geeignet zu wählenden Dispersionsparametern $\sigma'_y(\tilde{x},\tilde{z})$ und $\sigma'_z(\tilde{x},\tilde{z})$. Auf diesen Gesichtspunkt wird im Abschnitt 2.3.3 gesondert eingegangen. Es wird aber bereits in dieser Formulierung durch die Zuordnung spezifischer Windgeschwindigkeiten und Dispersionsparameter zu den individuellen Elementarquellen der Möglichkeit einer adäquaten horizontalen und vertikalen Strukturierung der Ausbreitungsschicht Rechnung getragen. Es ist an dieser Stelle zu betonen, daß durch die Ermittlung der Quellstärken der Elementarquellen unter Zugrundelegung der eingangs diskutierten Kontinuitätsbedingung die Massenerhaltung der Luftbeimengungen gewährleistet wird, eine Eigenschaft des Verfahrens, die unter Beibehaltung dieser Grundvoraussetzung für die individuelle Rauchfahne jeder Elementarquelle durch das allgemeine Konstruktionsprinzip summa summarum für jede Änderungsfläche tradiert wird.

Der aufgrund der obigen Gleichung (3-6a) zu erwartende Rechenaufwand zur Berechnung des gesamten Konzentrationsfeldes wird beträchtlich reduziert, wenn man einerseits das gute Konvergenzverhalten der 3. JACOBIschen Thetafunktion, die die Superposition der GAUSSschen Verteilungen in Gleichung (2-6) ausdrückt, berücksichtigt und andererseits in Rechnung stellt, daß wesentliche Beiträge zur Konzentrationsverteilung nur durch solche Elementarquellen geleistet werden, die innerhalb einer durch die Hauptachsenabschnitte $3\sigma_y$ und $3\sigma_z$ gekennzeichneten Ellipse um den Schnittpunkt der Rauchfahnenachse mit der Fläche $x = x_{\ddot{a}}^{(1)}$ liegen.

Zur Begründung einer konsequenten Anwendung des hier diskutierten Verfahrens gilt es, die Problematik seiner wiederholten Anwendung zu erörtern. Dies erweist sich insofern als von großer Bedeutung, als sich zwar die Quellstärken der Elementarquellen in einer ersten Änderungsstelle aus einer GAUSSschen Verteilung berechnen, nicht aber die einer zweiten Änderungsfläche. In einem solchen Fall nämlich ermittelt sich der Konzentrationsdurchsatz durch ein Flächenelement der Änderungsfläche als Summe zahlreicher GAUSSscher Verteilungen, die selbst nicht notwendigerweise wieder eine GAUSSsche Verteilung zu sein braucht.

Es bieten sich zwei Alternativen zur Behandlung dieser Problematik an: (a) die für die theoretische Durchdringung des Problems unbedingt erfor-

derliche und in dieser Arbeit auch konsequent angewandte analytische Lösung, die jedoch in einem aktuell anzuwendenden mathematisch-meteorologischen Diffusionsmodell einen unzumutbaren Rechenaufwand erfordern würde;

(b) eine, wie wir sie nennen wollen, pragmatische Lösung, in der ein aus Konzentrationswerten an einigen Stützstellen berechneter, mittlerer Konzentrationsdurchsatz durch ein Flächenelement zur Ermittlung der Quellstärke einer Elementarquelle herangezogen wird; eine Lösung, die sicherlich mit vertretbarem Rechenaufwand für beliebige Anzahlen von Änderungsflächen anwendbar ist.

Beide Verfahren seien im folgenden dargelegt und kurz diskutiert.

(a) Der analytische Algorithmus

Zur Verdeutlichung des ersteren Verfahrens sei an dieser Stelle der Übersichtlichkeit halber von der Betrachtung einer Richtungsänderung abgesehen, und es seien lediglich beliebige longitudinale und vertikale Änderungen der meteorologischen Einflußgrößen zugelassen. Der Durchsatz durch ein Flächenelement $\Delta y \cdot \Delta z$ der Referenzfläche $F_{\ddot{a}}^{(2)}$ am Orte $x = x_{\ddot{a}}^{(2)}$, und damit die Quellstärke $Q_{el}^{(2)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_o, z_o)$ für ein derartiges Flächenelement läßt sich dann wie folgt aus den Einzelbeiträgen der individuellen Elementarquellen in der Änderungsfläche $F_{\ddot{a}}^{(1)}$ aufsummieren:

$$Q_{el}^{(2)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_o, z_o) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{jH_I} \int_{y_o-\frac{\Delta y}{2}}^{y_o+\frac{\Delta y}{2}} dy \int_{z_o-\frac{\Delta z}{2}}^{z_o+\frac{\Delta z}{2}} dz \; Q_{el}^{(1)}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_i, z_j) \times$$

$$\times R(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, y, z; x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_i, z_j; H_I) \quad \text{für } x_{\ddot{a}}^{(2)} > x_{\ddot{a}}^{(1)} .$$

Im Falle eines GAUSSschen plumes mit den Randbedingungen totaler Reflexion am Erdboden und an einer Inversion lautet diese Beziehung:

$$Q_{el}^{(2)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_o, z_o) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{jH_I} \int_{y_o-\frac{\Delta y}{2}}^{y_o+\frac{\Delta y}{2}} dy \int_{z_o-\frac{\Delta z}{2}}^{z_o+\frac{\Delta z}{2}} dz \; \hat{u}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j) \hat{s}_{el}^{(i,j)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y, z)$$

$$\text{für } x_{\ddot{a}}^{(2)} > x_{\ddot{a}}^{(1)}$$

mit

$$\hat{s}_{el}^{(i,j)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y, z) = \frac{Q_{el}^{(1)}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_i, z_j)}{2\pi \hat{u}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)\, \sigma_y'(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)\, \sigma_z'(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)} \times$$

$$\times \exp\Big(\frac{(y - y_i)^2}{2\sigma_y'^2(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)}\Big) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big\{ \exp\Big(-\frac{(z - z_j + 2nH_I)^2}{2\sigma_z'^2(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)}\Big) +$$

$$+ \exp\Big(-\frac{(z + z_j + 2nH_I)^2}{2\sigma_z'^2(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)}\Big) \Big\} .$$

Unter Berücksichtigung des Konvergenzverhaltens der auftretenden Integrale bestimmt sich hieraus die Quellstärke $Q_{el}^{(2)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_o, z_o)$ in analoger Weise wie bei der Ableitung der Gl. (3-4)

$$Q_{el}^{(2)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_o, z_o) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_I}} Q_{el}^{(1)}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_i, z_j) \int_{y_o - \frac{\Delta y}{2}}^{y_o + \frac{\Delta y}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_y'(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)} \times$$

$$\times \exp\Big(-\frac{(y - y_i)^2}{2\sigma_y'^2(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)}\Big) \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big\{ \int_{z_o - \frac{\Delta z}{2}}^{z_o + \frac{\Delta z}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_z'(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)} \exp\Big(-\frac{(z - z_j + 2nH_I)^2}{2\sigma_z'^2(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)}\Big) +$$

$$+ \int_{z_o - \frac{\Delta z}{2}}^{z_o + \frac{\Delta z}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_z'(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)} \exp\Big(-\frac{(z + z_j + 2nH_I)^2}{2\sigma_z'^2(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j)}\Big) \Big\}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_I}} \frac{Q_{el}^{(1)}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, y_i, z_j)}{2\pi} \int_{i t_1}^{i t_2} dt \exp(-t^2/2) \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big\{ \int_{j v_{n_1}}^{j v_{n_2}} d_j v_n \exp(-{}_j v_n^2/2) + \int_{j w_{n_1}}^{j w_{n_2}} d_j w_n \exp(-{}_j w_n^2/2) \Big\}$$

mit

$$ {}_{i}t = (y - y_i)/\sigma'_y\,(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j) \;, $$

$$ {}_{j}v_n = (z - z_j + 2nH_I)/\sigma'_z\,(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j) \;, $$

$$ {}_{j}w_n = (z + z_j + 2nH_I)/\sigma'_z\,(x_{\ddot{a}}^{(2)} - x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j) \;. $$

Unter Verwendung dieser Quellstärken berechnet sich das Konzentrationsfeld im Raume $x'' > x_{\ddot{a}}^{(2)}$ nach der Gleichung

$$ \hat{s}\,(x'', y'', z'') = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_I}} \frac{Q_{el}^{(2)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_i, z_j)}{\hat{u}\,(x_{\ddot{a}}^{(2)}, z_j)}\, R(x'' - x_{\ddot{a}}^{(2)}, y'', z''; x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_i, z_j, H_I) $$

$$ \text{für } x'' > x_{\ddot{a}}^{(2)} \;. $$

In dem allgemeinen Algorithmus gewinnt man dann die Quellstärke $Q_{el}^{(k)}(x_{\ddot{a}}^{(k)}, y_o, z_o)$ der Elementarquellen in der Referenzfläche $F_{\ddot{a}}^{(k)}$ am Orte $x = x_{\ddot{a}}^{(k)}$ aus

$$ Q_{el}^{(k)}(x_{\ddot{a}}^{(k)}, y_o, z_o) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_I}} \int_{y_o - \frac{\Delta y}{2}}^{y_o + \frac{\Delta y}{2}} dy \int_{z_o - \frac{\Delta z}{2}}^{z_o + \frac{\Delta z}{2}} dz\, Q_{el}^{(k-1)}(x_{\ddot{a}}^{(k-1)}, y_i, z_j) \times \qquad (3\text{-}7) $$

$$ \times R(x_{\ddot{a}}^{(k)} - x_{\ddot{a}}^{(k-1)}, y, z; x_{\ddot{a}}^{(k-1)}, y_i, z_j; H_I) \text{ mit } x_{\ddot{a}}^{(k)} > x_{\ddot{a}}^{(k-1)} \;; $$

die resultierende Konzentrationsverteilung im Raume $x^{(k)} > x_{\ddot{a}}^{(k)}$ ergibt sich daraus zu

$$ \hat{s}\,(x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_I}} \frac{Q_{el}^{(k)}(x_{\ddot{a}}^{(k)}, y_i, z_j)}{\hat{u}\,(x_{\ddot{a}}^{(k)}, z_j)}\, R(x^{(k)} - x_{\ddot{a}}^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}; x_{\ddot{a}}^{(k)}, y_i, z_j; H_I) \qquad (3\text{-}8) $$

$$ \text{für } x_{\ddot{a}}^{(k+1)} \geq x^{(k)} > x_{\ddot{a}}^{(k)} \;. $$

(b) Das pragmatische Verfahren

Die theoretische Fundierung der pragmatischen Lösung leitet sich ebenfalls ab aus der Relation

$$Q_{el}^{(2)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_o, z_o) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_I}} \hat{u}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j) \int_{y_o-\frac{\Delta y}{2}}^{y_o+\frac{\Delta y}{2}} dy \int_{z_o-\frac{\Delta z}{2}}^{z_o+\frac{\Delta z}{2}} dz \, \hat{s}_{el}^{(i,j)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y, z)$$

$$\text{für } x_{\ddot{a}}^{(2)} > x_{\ddot{a}}^{(1)} ,$$

wenn man berücksichtigt, daß sich durch den Ausdruck

$$(3\text{-}9) \qquad \left[\hat{s}_{el}^{(i,j)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_o, z_o)\right]_{(\Delta F)} := \frac{1}{\Delta F} \int_{y_o-\frac{\Delta y}{2}}^{y_o+\frac{\Delta y}{2}} dy \int_{z_o-\frac{\Delta z}{2}}^{z_o+\frac{\Delta z}{2}} dz \, \hat{s}_{el}^{(i,j)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y, z)$$

ein Flächenmittel der Konzentration $s_{el}^{(i,j)}$ über das Flächenelement $\Delta F = \Delta y \cdot \Delta z$ der Referenzfläche $F_{\ddot{a}}^{(2)}$ am Orte $x = x_{\ddot{a}}^{(2)}$ definieren läßt.

Zum Zwecke der Durchführung von Routinerechnungen läßt sich demnach die Quellstärke $Q_{el}^{(2)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_o, z_o)$ der Elementarquellen aus einem geeigneten Flächenmittel der Konzentrationsbeiträge in einem leicht zu berechnenden Lateralschnitt durch das Konzentrationsfeld an der Stelle $x = x_{\ddot{a}}^{(2)}$ bestimmen:

$$(3\text{-}10) \qquad Q_{el}^{(2)}(x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_o, z_o) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_I}} \hat{u}(x_{\ddot{a}}^{(1)}, z_j) \cdot \Delta F \cdot \left[\hat{s}_{el}^{(i,j)} x_{\ddot{a}}^{(2)}, y_o, z_o)\right]_{(\Delta F)}$$

$$\text{für } x_{\ddot{a}}^{(2)} > x_{\ddot{a}}^{(1)} .$$

Bei den Rechnungen in dieser Arbeit wollen wir uns stets auf den unter (a) diskutierten analytischen Algorithmus stützen.

2.3.3 Bestimmung adäquater Dispersionsparameter

Durch die mathematische Beschreibung des von uns vorgeschlagenen Verfahrens wird die folgende Problematik aufgeworfen, die im Prinzip heutzutage bei allen Trajektorienverfahren zu verzeichnen ist und einige Schwächen des bislang verfolgten Konzepts aufdeckt:

- einerseits werden in der konventionellen Ausbreitungsrechnung die verwendeten Dispersionsparameter abhängig von der Reisezeit der Beimengungspartikel angesetzt,
- soll andererseits jedes Flächenelement einer Referenzfläche $F_{\ddot{a}}^{(k)}$ Ausgangspunkt einer 'sub-Rauchfahne' mit jeweils individuellen Werten der meteorologischen Einflußgrößen sein, so wird durch diese Betrachtungsweise naturgemäß eine Beschreibung der Dispersion in Abhängigkeit von der Reisezeit erschwert.

Aus diesem Grunde und wegen der engen Verknüpfung der erforderlichen Größe des Flächenelements $\Delta F = \Delta y \cdot \Delta z$ mit dem Wert der Standardabweichungen σ_y und σ_z am Orte $x_{\ddot{a}}^{(k)}$ (als anzustrebende Bedingung gilt: $\Delta z \ll \sigma_z(x_{\ddot{a}}^{(k)})$; $\Delta y \ll \sigma_y(x_{\ddot{a}}^{(k)})$) sei in diesem Abschnitt ein spezielles Verfahren zur Ermittlung geeigneter Dispersionsparameter vorgeschlagen.

Das konsequenteste Vorgehen wäre der Übergang von der Quasi-LAGRANGEschen Beschreibung des Ausbreitungsprozesses zu einer rein EULERschen Darstellung, in der die Dispersionsparameter direkt an den Turbulenzzustand der Atmosphäre gekoppelt sind, unabhängig von der Vorgeschichte der Ausbreitung der Partikel.

Die fehlenden Kenntnisse über einen solchen Zusammenhang lassen jedoch, will man das hier vorgeschlagene Verfahren in Diffusionsmodellen praktisch anwenden, einen Rückgriff auf die wenigen publizierten Werte für die Dispersionsparameter, die alle eine Abhängigkeit von der Reisezeit aufweisen, als zweckmäßig erscheinen. Das macht eine Reihe von Zusatzüberlegungen zur Adaptierung dieser Standardabweichungen an das vorgeschlagene Verfahren erforderlich. Bei dem im folgenden geschilderten Vorgehen führen einfache, aber rechnerisch aufwendige, numerische Tests zum gewünschten Resultat.

Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist das Postulat, daß für identische meteorologische Verhältnisse (Homogenität des Windfeldes und konstante atmosphärische Schichtung) das von den Elementarquellen (am Orte $x = x_{\ddot{a}}$) erzeugte Konzentrationsfeld für $x > x_{\ddot{a}}$ gleich demjenigen sein soll, das durch die Originalquelle (Quellpunkt $x = o$) erzeugt wird. Aus der Identität der Konzentrationsfelder folgt die Relation

$$R(x,y,z;o,o,H_e;H_l) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_l}} \int_{y_i-\frac{\Delta y}{2}}^{y_i+\frac{\Delta y}{2}} dy' \int_{z_j-\frac{\Delta z}{2}}^{z_j+\frac{\Delta z}{2}} dz' \, R(x_{\ddot{a}},y',z';o,o,H_e;H_l) \times \\ \times R(x - x_{\ddot{a}},y,z;x_{\ddot{a}},y_i,z_j;H_l) \quad \text{für } x > x_{\ddot{a}} . \tag{3-11}$$

Zur Veranschaulichung dieser Beziehung sei sie einmal ausführlich für einen GAUSSschen plume, der von einer Quelle am Orte (o,o,o) ausgeht, aufgeschrieben. Der Übersichtlichkeit halber sei lediglich eine totale Reflexion der Luftbeimengungen an der Erdoberfläche betrachtet, als obere Randbedingung diene $s \to o$ für $z \to \infty$. Dann gilt

$$2\,E[y|\sigma_y(x)] \cdot E[z|\sigma_z(x)] = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_l}} A[y_i|\sigma_y(x_{\ddot{a}})] \cdot A[z_j|\sigma_z(x_{\ddot{a}})] \times \\ \times E[y - y_i|\sigma'_y(x - x_{\ddot{a}})] \cdot \{E[z - z_j|\sigma'_z(x - x_{\ddot{a}})] + E[z + z_j|\sigma'_z(x - x_{\ddot{a}})]\}$$

mit $$A[t|\sigma_t] := \frac{1}{\sigma_t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} dt' \exp\left(-\frac{t'^2}{2\sigma_t^2}\right) .$$

Hieraus wird ersichtlich, daß Gleichung (3-11) implizit eine Bedingung zur Ermittlung geeigneter Diffusionsparameter σ'_y und σ'_z darstellt, die die von den Elementarquellen ausgehenden 'sub-Rauchfahnen kennzeichnen.

Zu diesem Zweck werden durch die Anwendung der Methode der kleinsten Abweichungsquadrate diejenigen Wertepaare σ'_y, σ'_z bestimmt, für die der Ausdruck (siehe Gleichung (3-11))

$$\left| R(x,y,z;o,o,H_e;H_I) - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{j_{H_I}} \int_{y_i-\frac{\Delta y}{2}}^{y_i+\frac{\Delta y}{2}} dy' \int_{z_j-\frac{\Delta z}{2}}^{z_j+\frac{\Delta z}{2}} dz' R(x_{\ddot{a}},y',z';o,o,H_e;H_I) \times \right.$$

$$\left. \times R(x - x_{\ddot{a}},y,z;x_{\ddot{a}},y_i,z_j;H_I) \right|^2$$

minimal wird. Für σ'_y und σ'_z sei ein Gesetz der Form

(3-12) $\qquad \sigma'_y = \sigma_y(x - x_{\ddot{a}}) + \sigma_{y_o}(x_{\ddot{a}})\,; \qquad \sigma'_z = \sigma_z(x - x_{\ddot{a}}) + \sigma_{z_o}(x_{\ddot{a}})$

zugrundegelegt. Hierin stellen $\sigma_y(x - x_{\ddot{a}})$ und $\sigma_z(x - x_{\ddot{a}})$ die x-abhängigen Ausbreitungsanteile dar, die hier nach den von SINGER und SMITH (1966) für die Brookhavensche Böigkeitsklassifikation angegebenen, auf empirischem Wege gewonnenen Gesetzmäßigkeiten* berechnet werden. Die Größen σ_{yo} und σ_{zo} bedeuten durch die Natur des Verfahrens bedingte vom Ort $x_{\ddot{a}}$ der Elementarquellen abhängige Anfangsbreiten. Macht man zusätzlich die Annahme, daß σ_{z_o} durch **

---

* Auf diese Werte wird hier zurückgegriffen, weil sie durch die Wahl größerer Emissionshöhen (ca. 1oom) bei der meßtechnischen Bestimmung der Diffusionsparameter am ehesten geeignet sind, das Dispersionsverhalten der Effluenten aus solchen Quellen zu beschreiben, für die die in dieser Arbeit untersuchten Einflüsse einer horizontalen und vertikalen Strukturierung der Ausbreitungsschicht von Bedeutung sind.

** Diese Relation ist in Anlehnung an die Beziehung

$$\sigma_z(x) = \frac{G}{F}\,\sigma_y(x)$$

formuliert worden, die auf zwei Grundannahmen basiert:

1.) die von der Reisezeit abhängigen Standardabweichungen gehorchen Potenzgesetzen der Form

$$\sigma_y = F\,\hat{u}^f\tau^f = F x^f$$
$$\sigma_z = G\,\hat{u}^g\tau^g = G x^g \quad , \qquad \text{für} \quad \hat{u} = \frac{x}{\tau} = \text{konst.}$$

2.) die Ausbreitung von Luftbeimengungen in y- und z-Richtung genügt der Ähnlichkeitsannahme

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial x} \Big/ \frac{\partial\sigma_z}{\partial x} = \sigma_y/\sigma_z \quad ,$$

aus der die Identität der Exponenten f und g folgt (siehe McCORMICK, GUTSCHE (1969)).

Diese Annahmen werden auch von dem in dieser Arbeit verwandten Ausbreitungsschema von SINGER und SMITH erfüllt.

$$\sigma_{z_o}(x_{\ddot{a}}) = \frac{G}{F}\,\sigma_{y_o}(x_{\ddot{a}})$$

in Relation zu σ_{y_o} steht, so ist es zur Ermittlung des kleinsten Abweichungsquadrates ausreichend, lediglich σ_{y_o} systematisch zu variieren.

Dieses Verfahren zur Bestimmung geeigneter Wertepaare σ'_y, σ'_z als adäquate Diffusionsparameter wurde für zahlreiche Orte $x_{\ddot{a}}$ durchgeführt. Die dabei gewonnene Abhängigkeit der Werte für σ_{y_o} von $x_{\ddot{a}}$ ist in den Abbildungen 2 bis 4 wiedergegeben. Zu Vergleichszwecken ist in diesen Abbildungen zusätzlich noch die x-Abhängigkeit von σ_y (nach SINGER und SMITH) eingetragen, um die zu erwartende Ähnlichkeit in ihrem Verhalten zu demonstrieren. Diese Ähnlichkeit läßt als erste Approximation für den Bereich nicht allzu großer Entfernungen $x_{\ddot{a}}$ von der Originalquelle die Relation

$$\frac{\sigma_{y_o}(x_{\ddot{a}})}{\sigma_y(x = x_{\ddot{a}})} = \text{konst.}$$

zu, die aber im weiteren Verlauf der Rechnungen nicht benutzt wird.

Die für die Rechnung verwandten aktuellen Diffusionsparameter σ'_y und σ'_z ergeben sich nach Gleichung (3-12) aus der Summe eines x-abhängigen Terms $\sigma_i(x - x_{\ddot{a}})$ und einer $x_{\ddot{a}}$-abhängigen Anfangsbreite $\sigma_{i_o}(x_{\ddot{a}})$ (mit $i = y, z$).

Mit Hilfe des so ermittelten Verhaltens der Standardabweichungen σ'_y und σ'_z ist nach den Gleichungen (3-7) und (3-8) bei vorgegebener Variation des Geschwindigkeitsfeldes und der atmosphärischen Stabilität eine Untersuchung des Einflusses der Physik der planetarischen Grenzschicht auf die Ausbreitung von Luftbeimengungen möglich. Auf die Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens auf diese Problemkreise wird im folgenden Kapitel eingegangen.

Wünschenswert wäre jedoch auch einmal die Erörterung des inversen Problems. Die Heranziehung empirischer Dispersionsparameter, die i. a. aus Konzentrationsmessungen am Erdboden gewonnen wurden, schließt nämlich ein, daß sich das Verhalten der meteorologischen Einflußgrößen in der Ausbreitungsschicht (z. B. die EKMANsche Winddrehung) bereits implizit - in einer Art Vertikalmittel - in den Meßdaten, die zur Ermittlung der Dispersionsparameter verwendet werden, niederschlägt. Unter diesen Bedingungen ist dann zum einen die Verwendung einer GAUSSschen Lösung mit homogener Windverteilung fragwürdig, zum anderen wäre die Verwendung ein- und derselben Dispersionsparameter bei der Berechnung der Ausbreitung von Luftbeimengungen, die in unterschiedlichen Höhen emittiert wurden, nicht sinnvoll.

Eine Sensitivitätsanalyse zur Beantwortung der mit diesem Komplex verbundenen Fragestellungen ließe sich mit dem hier vorgeschlagenen Verfahren in die Wege leiten.

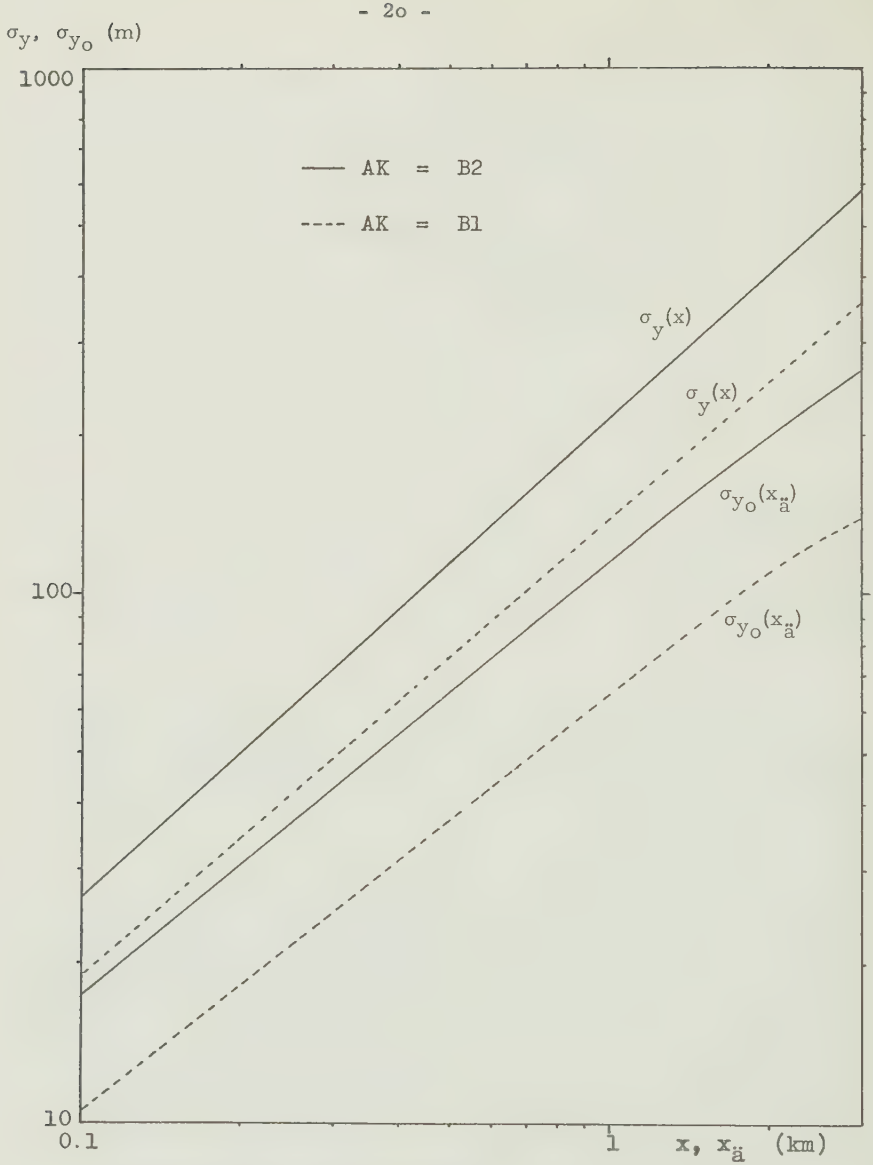


Abb. 2: Die berechneten Anfangsbreiten $\sigma_{y_o}(x_{\ddot{a}})$ für die Ausbreitungsklassen B2 und B1; zu Vergleichszwecken sind zusätzlich die von SINGER und SMITH angegebenen Dispersionsparameter $\sigma_y(x)$ eingetragen. Die Werte für σ_z bzw. σ_{z_o} lassen sich aus der Gl. (3-12a) und den Angaben für σ_y und σ_{y_o} bestimmen.

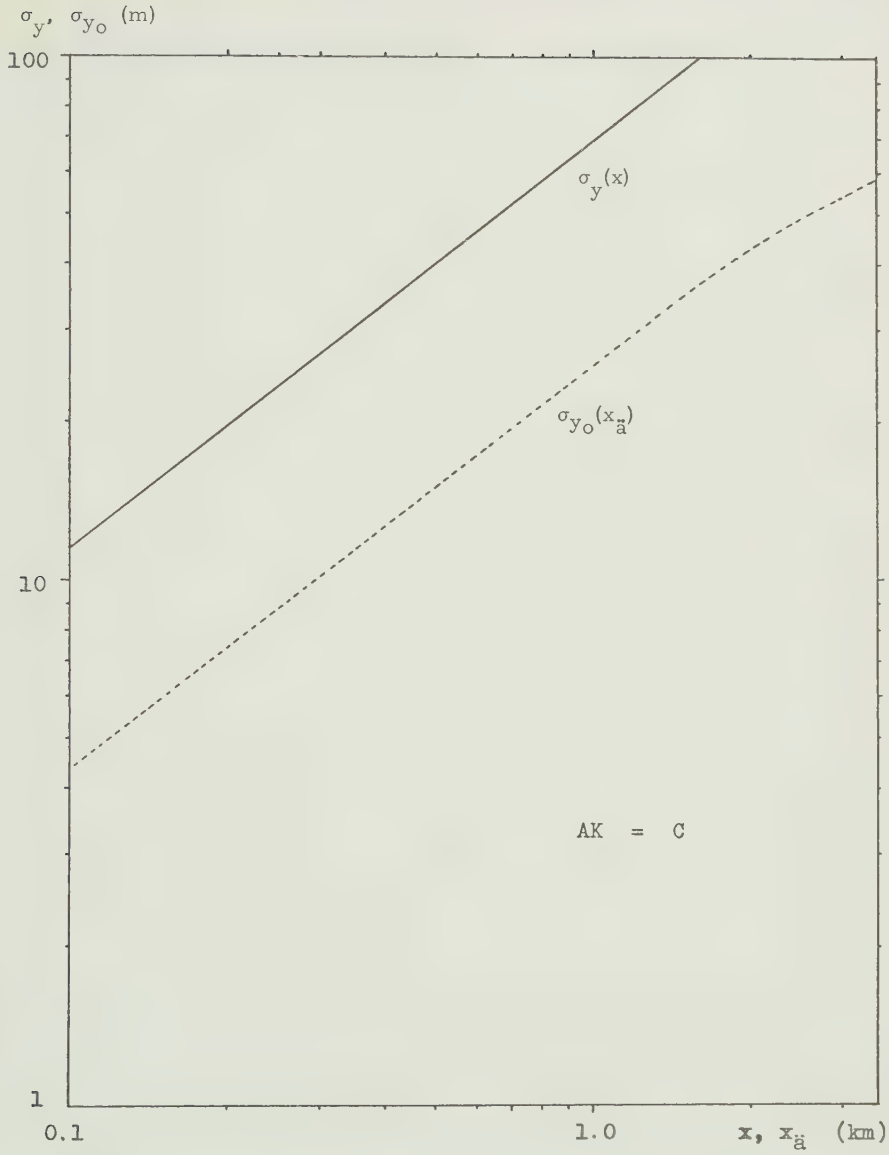


Abb. 3: Die berechneten Anfangsbreiten $\sigma_{y_o}(x_{ä})$ für die Ausbreitungsklasse AK = C; zu Vergleichszwecken sind zusätzlich die von SINGER und SMITH angegebenen Dispersionsparameter $\sigma_y(x)$ eingetragen. Die Werte für σ_z bzw. σ_{z_o} lassen sich aus Gl. (3-12a) bestimmen.

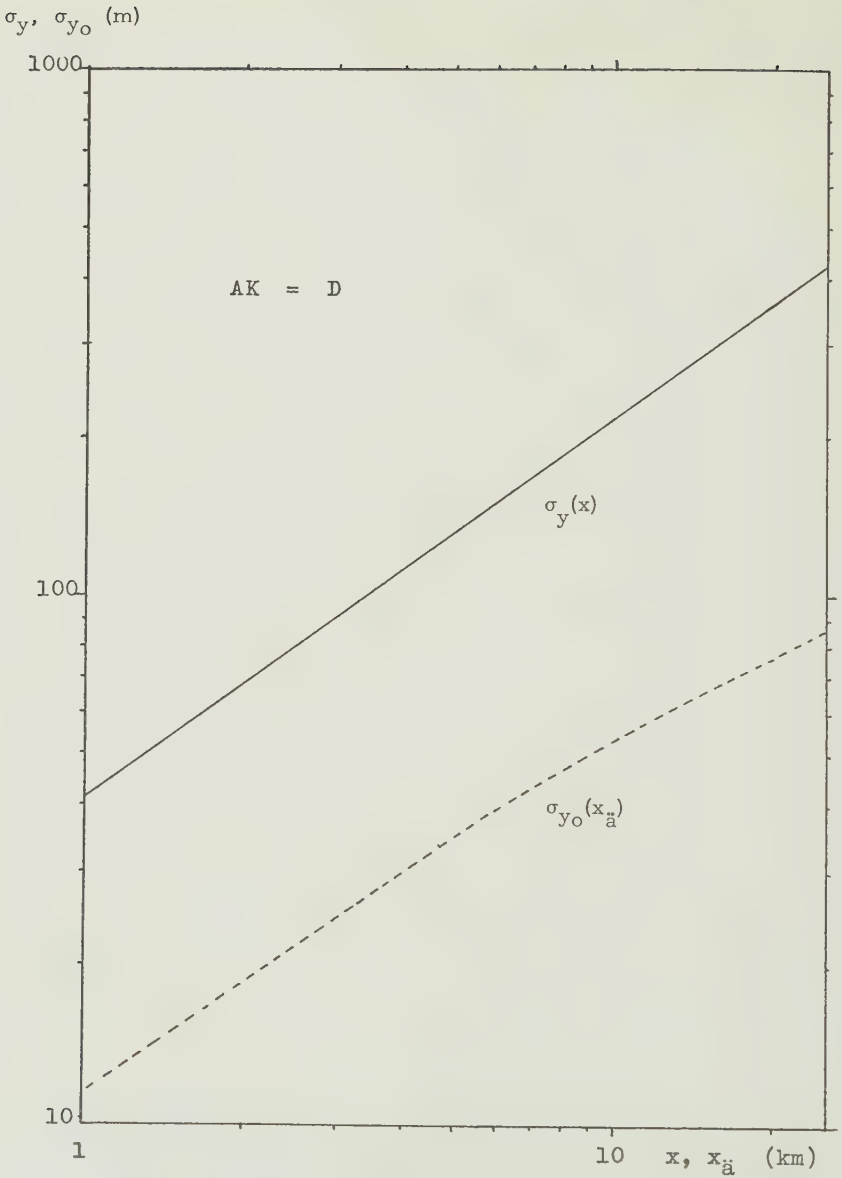


Abb. 4: Die berechneten Anfangsbreiten $\sigma_{y_o}(x_{\ddot{a}})$ für die Ausbreitungsklasse AK = D; zu Vergleichszwecken sind zusätzlich die von SINGER und SMITH angegebenen Dispersionsparameter $\sigma_y(x)$ eingetragen. Die Werte für σ_z bzw. σ_{z_o} lassen sich aus der Gl. (3-12a) bestimmen.

3. ANWENDUNG DES VORGESCHLAGENEN VERFAHRENS ZUR UNTERSUCHUNG DES EINFLUSSES SPEZIELLER ASPEKTE DER PHYSIK DER PLANETARISCHEN GRENZSCHICHT AUF DIE AUSBREITUNG VON LUFTBEIMENGUNGEN

Das in Kapitel 2 dargelegte Verfahren bietet eine Möglichkeit,

(1) Raum-Zeit-Trajektorien von Rauchfahnen unter sich ändernden meteorologischen Verhältnissen und über unebener Topographie zu verfolgen und

(2) auf eine numerisch nicht allzu aufwendige Weise den Einfluß verschiedener Elemente der Physik der planetarischen Grenzschicht auf die Ausbreitung von Luftbeimengungen zu untersuchen.

Beide Aspekte kommen dem Wunsche einer Verfeinerung der mathematisch-meteorologischen Diffusionsmodelle entgegen, ohne dabei auf die Verwendung von GAUSSschen Verteilungen zu verzichten, die sich aufgrund des relativ geringen numerischen Aufwandes und der damit verbundenen relativ niedrigen erforderlichen Rechenzeiten als so angenehm erwiesen haben.

Das Vorgehen besteht darin, den individuellen Parametern der als Punktquellen interpretierten Elementarquellen in der jeweiligen Referenzebene entsprechend den dortigen meteorologischen und topographischen Gegebenheiten charakteristische Werte zuzuordnen.

Beispielsweise dürfte für die Verfolgung von Trajektorien die Änderung der Achsenrichtung der Rauchfahne der maßgebliche Faktor sein; für die Untersuchung des Einflusses der verschiedenen Elemente der Physik der planetarischen Grenzschicht hingegen wird sich eine vertikale Variation aller wesentlichen Einflußgrößen als unumgänglich erweisen. Dazu wird jeder Elementarquelle für die von ihr ausgehende 'sub-Rauchfahne' eine Windgeschwindigkeit, spezifische Dispersionsparameter $\sigma'_y(x)$ und $\sigma'_z(x)$ und über die Vorgabe einer Windrichtung in der jeweiligen Quellhöhe eine individuelle 'Rauchfahnenachse' zugeordnet. Diese Werte der relevanten Parameter können für die verschiedenen Elementarquellen unterschiedlich sein und durch die Vorgabe eines Vertikal- bzw. Horizontalprofils der Einzelgrößen festgelegt werden.

Zur Verfolgung des Punktes (2) wird in diesem Kapitel eine Einteilung der interessierenden Phänomene in zwei Problemkreise vorgenommen:

1. Untersuchung des Einflusses der vertikalen Struktur des Windfeldes,
2. Untersuchung der vertikalen Variation der atmosphärischen Stabilität.

Eine Kombination beider Gesichtspunkte, wie sie insbesondere bei lokalen Zirkulationssystemen (wie z. B. bei der Land-See-Wind-Zirkulation oder bei der durch eine städtische Wärmeinsel verursachten konvergenten Einströmung in niedrigen Höhen in das Stadtgebiet) auftritt, läßt sich dann mit dem hier vorgeschlagenen Verfahren ebenfalls leicht verwirklichen.

3.1 Der Einfluß der vertikalen Struktur des Windfeldes in der planetarischen Grenzschicht auf die Ausbreitung von Luftbeimengungen

3.1.1 Vertikales Windprofil in Form eines Potenzgesetzes.

Da analytische Lösungen der Diffusionsprobleme für realistische Windprofile (wie z. B. dem logarithmischen Windprofil in der bodennahen Grenzschicht) bislang nicht bekannt sind, ist man zur Zeit angewiesen auf die Lösung (2-5) in Kapitel 2 für ein homogenes Windfeld oder auf die von SUTTON (1953) angegebene Lösung der Diffusionsgleichung, der Potenzgesetze für die mittlere Windgeschwindigkeit und für den Austauschkoeffizienten zugrundeliegen.

Als erste Anwendung des hier vorgeschlagenen Verfahrens sei daher die Ausbreitung von Luftbeimengungen in einem Windfeld diskutiert, das durch ein Potenzgesetz der Form

$$\hat{u}(z) = \hat{u}(H_e) \left(\frac{z}{H_e}\right)^m$$

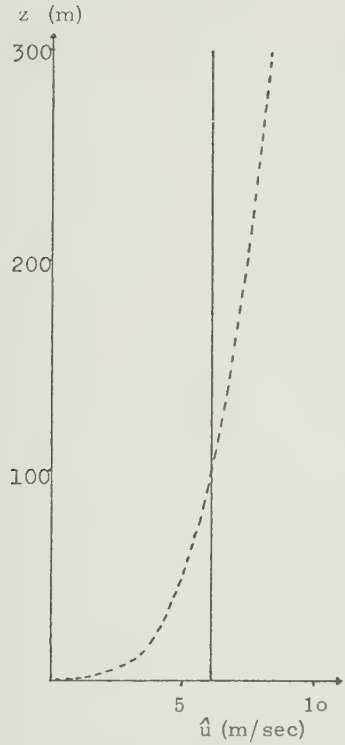
für die mittlere Windgeschwindigkeit mit einem stabilitätsabhängigen Exponenten m beschrieben werde. Ein direkter Vergleich mit der SUTTONschen Lösung erweist sich als nicht möglich, da im Gegensatz zu den aus einem Potenzgesetz für den Austauschkoeffizienten abgeleiteten Standardabweichungen hier die in Kapitel 2.3.3 bestimmten Dispersionsparameter verwandt werden.

Sinnvollerweise sei daher untersucht, was für Abweichungen auftreten verglichen mit solchen Schemata, die bereits in der Praxis angewandt wurden. In dem von FORTAK (1966) für das Stadtgebiet von Bremen entwickelten Diffusionsmodell wird aus dem obigen Potenzgesetz eine über die vertikale Erstreckung der Rauchfahne gemittelte Windgeschwindigkeit bestimmt und mit dieser in die Lösung der Diffusionsgleichung für ein homogenes Windfeld eingegangen. Im Bremer Modell wird mit den in der folgenden Tabelle wiedergegebenen Werten für den stabilitätsabhängigen Exponenten m gerechnet.

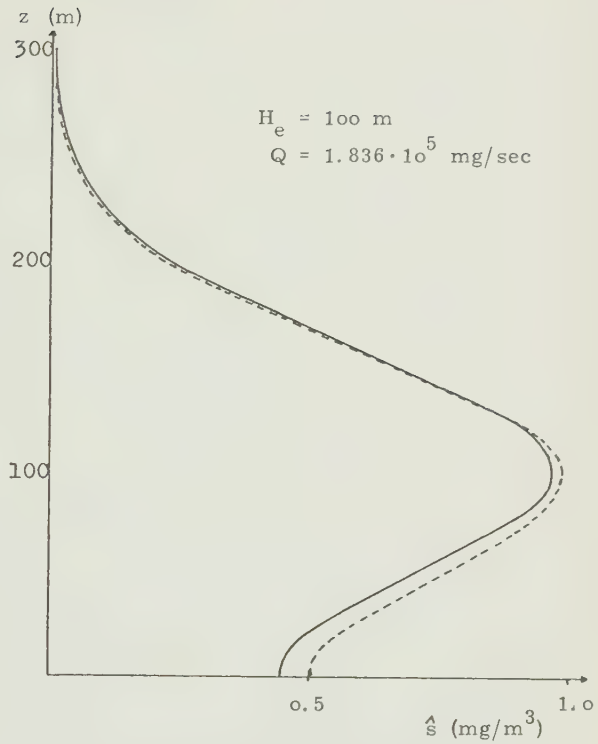
AK	m
B2	o. 111
B1	o. 2o8
C	o. 288
D	o. 396

Tabelle: Die im FORTAKschen Diffusionsmodell verwendete Stabilitätsabhängigkeit des Exponenten m in einem Potenzgesetz für die mittlere Windgeschwindigkeit. (mit 'AK' sind die Ausbreitungsklassen nach SINGER und SMITH gekennzeichnet)

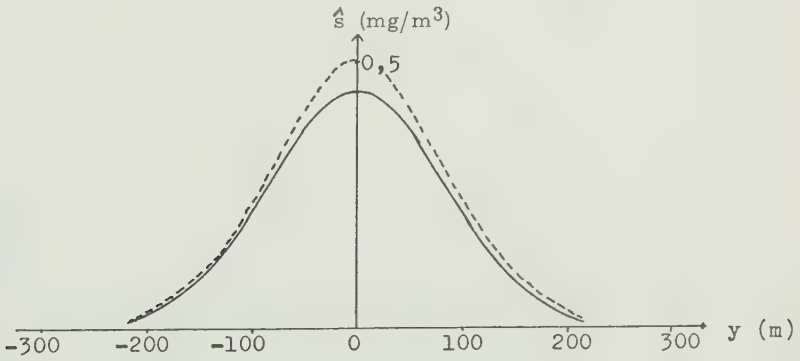
In den Abbildungen 5 bis 7 sind die Konzentrationsverteilungen für einige Ausbreitungsklassen dargestellt, die man zum einen erhält, wenn man mit einem solchen homogenen Windfeld arbeitet, und zum anderen, indem man den einzelnen Elementarquellen jeweils eine für die 'Quellhöhe' repräsen-



Vertikales Windprofil



Vertikalschnitt durch das Konzentrationsfeld an der Stelle x = 1.3 km



Bodenkonzentrationsfeld an der Stelle x = 1.3 km

Abb. 5: Vergleich der Konzentrationsfelder für ein homogenes und für das nach einem Potenzgesetz berechneten Windprofil (Ausbreitungsklasse AK = C).

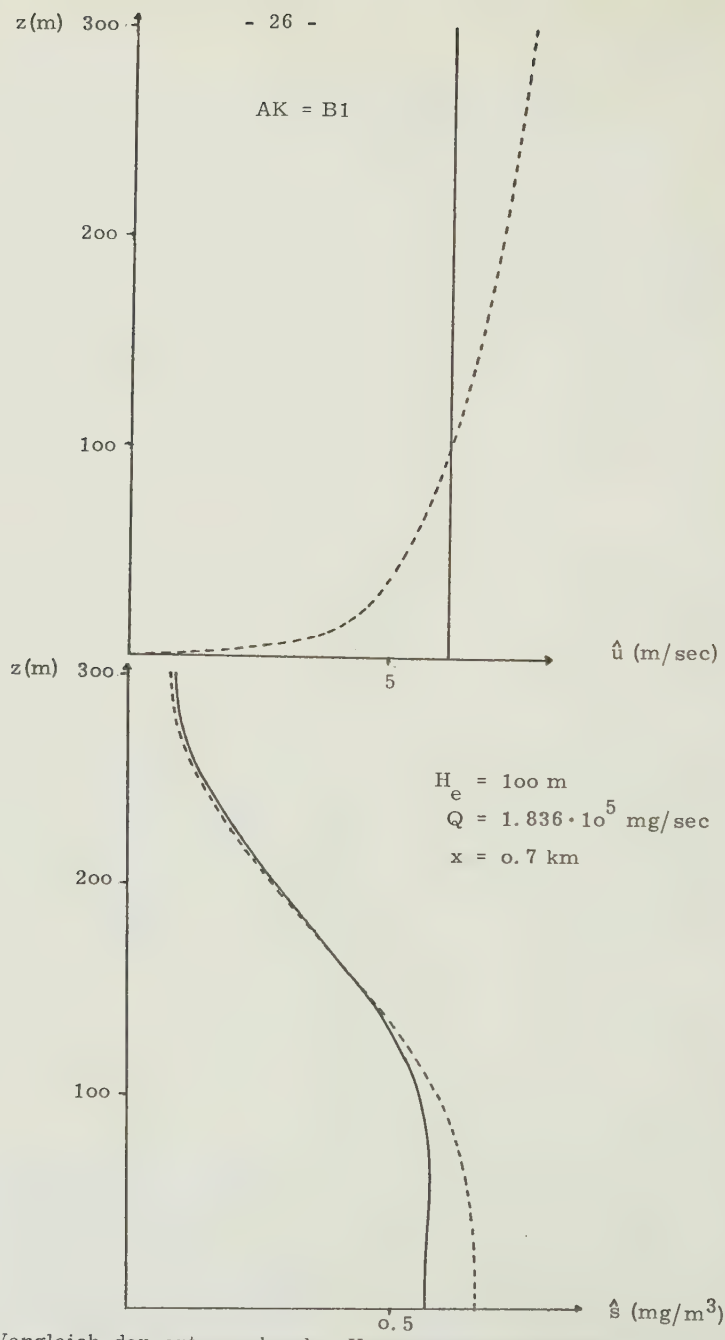


Abb. 6: Vergleich der entsprechenden Konzentrationsfelder für AK = B1

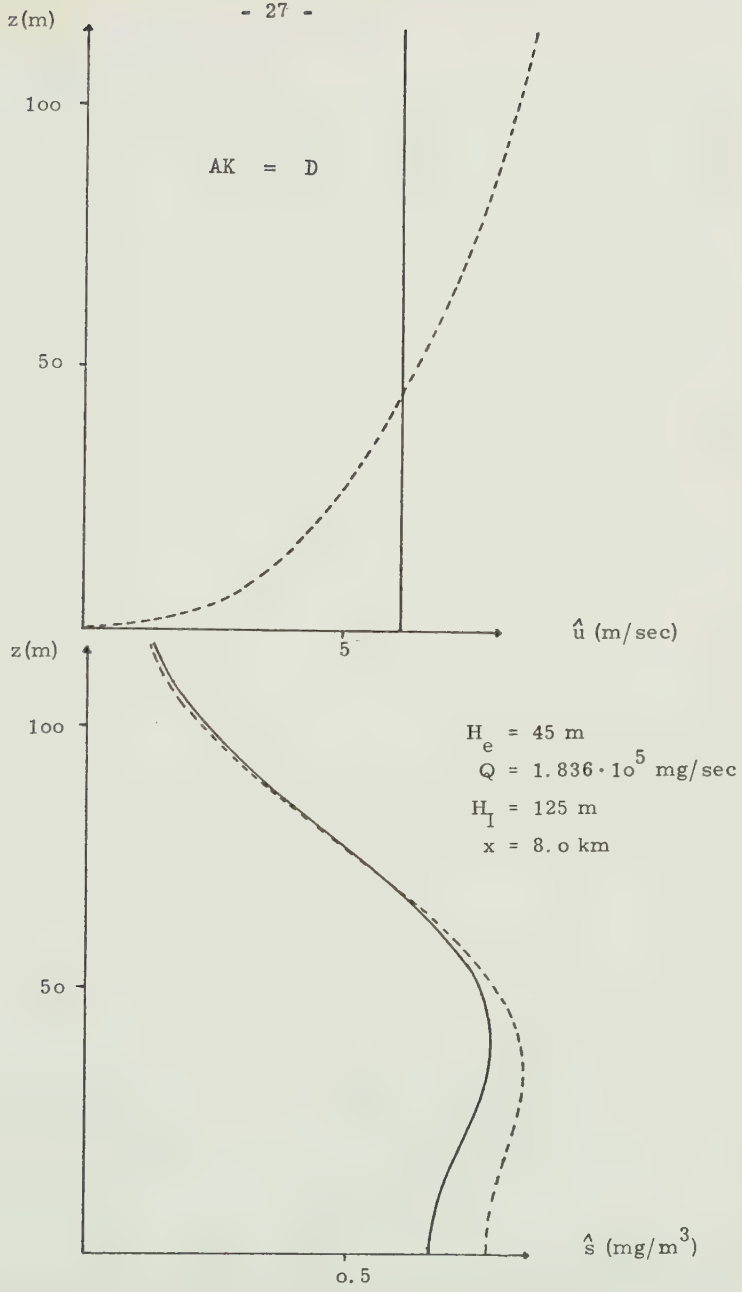


Abb. 7: Vergleich der entsprechenden Konzentrationsfelder für AK = D.

tative, nach dem Potenzgesetz ermittelte Windgeschwindigkeit zuordnet, Es ist offentsichtlich, daß die größten Abweichungen zwischen diesen beiden Konzentrationsverteilungen in dem Bereich auftreten, in dem die größten Geschwindigkeitsgradienten vorliegen, d.h. in der Nähe des Erdbodens. Dort liegen die Abweichungen zwischen beiden Verfahren für alle Stabilitätsklassen in der Größenordnung von ca. 1o %.

3.1.2 Das EKMANsche Windfeld

Für die folgenden Betrachtungen werde ausgegangen von der quasistatisch approximierten hydrodynamischen Gleichung

$$f\mathbb{k} \times \hat{\bar{w}}_h = f\mathbb{k} \times \hat{\bar{w}}_{h,g} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_{z,h}}{\partial z}.$$

Hierin bedeuten:

$\hat{\bar{w}}_h$: den Vektor der mittleren horizontalen Windgeschwindigkeit,

$\hat{\bar{w}}_{h,g}$: den Vektor des geostrophischen Windes,

$\mathbb{k}$: den Einheitsvektor in z-Richtung,

$\bar{\rho}$: die mittlere Dichte der Luft,

f : den CORIOLIS-Parameter,

$\tau_{z,h}$: den turbulenten Schubspannungsvektor.

Die Mittelungssymbole kennzeichnen in konventioneller Schreibweise das arithmetische REYNOLDSsche Mittel ($\bar{}$) und das mit der Dichte gewogene HESSELBERGsche Mittel ($\hat{}$).

Dieses Gleichungssystem für die horizontalen Komponenten der mittleren Windgeschwindigkeit wird komplettiert durch einen Austauschansatz für die turbulente Schubspannung. Unter der Annahme eines konstanten Austauschkoeffizienten gilt dann für die turbulente Reibungsbeschleunigung

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tau_{z,h}}{\partial z} = K_M \frac{\partial^2 \hat{\bar{w}}_h}{\partial z^2}.$$

Mit Hilfe der Randbedingungen:

(1) $\hat{\bar{w}}_h \to \hat{\bar{w}}_{h,g}$ für $z \to \infty$

(Annäherung des mittleren Windes an den geostrophischen Wind für große Höhen);

(2) $\hat{\bar{w}}_{ha} = \varkappa \left(\frac{\partial \hat{\bar{w}}_h}{\partial z} \right)_a$

mit

$$\varkappa = (z_a + z_o) \log \frac{z_a + z_o}{z_o}$$

(Anpassung an ein logarithmisches Windprofil in Anemometerhöhe (Index a); z_o kennzeichnet die Rauhigkeitslänge)

läßt sich das Gleichungssystem integrieren zu

$$\hat{u}(z) = - A \, |\hat{v}_{h,g}| \qquad \exp(-\pi z/H) \, \sin(\pi z/H - b),$$

$$\hat{v}(z) = \qquad |\hat{v}_{h,g}| \, [1 - A \exp(-\pi z/H) \cos(\pi z/H - b)],$$

wobei die Höhe z vom Anemometerlevel z_a aus gezählt worden ist, so daß $z_a = o$ ist. Hierin bedeuten:

$$H := \pi \sqrt{2 K_M / f} \qquad \text{(EKMANsche Reibungshöhe)},$$

$$A^2 := [1 + 2 \varkappa \pi / H + 2 (\varkappa \pi / H)^2]^{-1},$$

$$\tan b = - \varkappa \pi / (H + \varkappa \pi).$$

Diese Lösung ermöglicht für jede Elementarquelle die Festlegung der jeweiligen individuellen 'Rauchfahnenachse' und über

$$\hat{u}_{el}(x_{\bar{a}}, z_j) := \sqrt{\hat{u}^2(z_j) + \hat{v}^2(z_j)}$$

der zugehörigen mittleren Transportgeschwindigkeit der Luftbeimengungen, die das entsprechende Flächenelement durchsetzen.

Nach dem in Kapitel 2 dargelegten Verfahren läßt sich dann, wie es in Abbildung 8 durch einen Horizontalschnitt veranschaulicht worden ist, der Betrag berechnen, den die Elementarquelle (i,j) im Punkte $(x_{\bar{a}}, y_i, z_j)$ zur Konzentration im Punkte (x'',y'',z'') leistet.

In den Abbildungen 9 bis 12 werden einige der Ergebnisse wiedergegeben, die auf diese Weise für die Ausbreitung von Luftbeimengungen gewonnen wurden, die von einer kontinuierlichen Punktquelle mit einer effektiven Quellhöhe H_e = 1oo m und einer Quellstärke von $Q = 1.836 \cdot 1o^5$ mg/sec emittiert werden. Die atmosphärische Schichtung ist als neutral vorausgesetzt und die Ausbreitungsschicht durch die Annahme einer sperrenden Inversion in 2oo m Höhe vertikal begrenzt. In den Abbildungen 9 bis 11 wird ein Vergleich der so bestimmten Konzentrationsfelder mit denen auf konventionelle Art, für ein homogenes Windfeld berechneten Verteilungen vorgenommen. Zu diesem Zweck sind die Rechnungen so angepaßt, daß Windrichtung und -geschwindigkeit in dem homogenen Windfeld der Windrichtung und -geschwindigkeit in der effektiven Quellhöhe H_e im EKMANschen Windfeld entsprechen.

Einen ersten Eindruck von der Wirkung eines EKMANschen Windfeldes auf die Konzentrationsverteilung in einer Rauchfahne vermittelt in Abbildung 9 die Angabe der mit dem Konzentrationswert auf der Rauchfahnenachse im homogenen Fall $\hat{s}_h(o)$ normierten Konzentrationswerte für verschiedene Höhen. Die Konzentrationsverteilung im homogenen Fall nimmt dann für alle Höhen ein- und dieselbe Gestalt an (in Abbildung 9 gestrichelt wiedergegeben).

Der Einfluß des EKMANschen Windfeldes schlägt sich in einem interessanten Zusammenwirken zweier Komponenten nieder: Windrichtungs- und -geschwindigkeitsänderung mit der Höhe. Durch die niedrige Windgeschwindigkeit unterhalb der effektiven Emissionshöhe ist in diesem Bereich eine

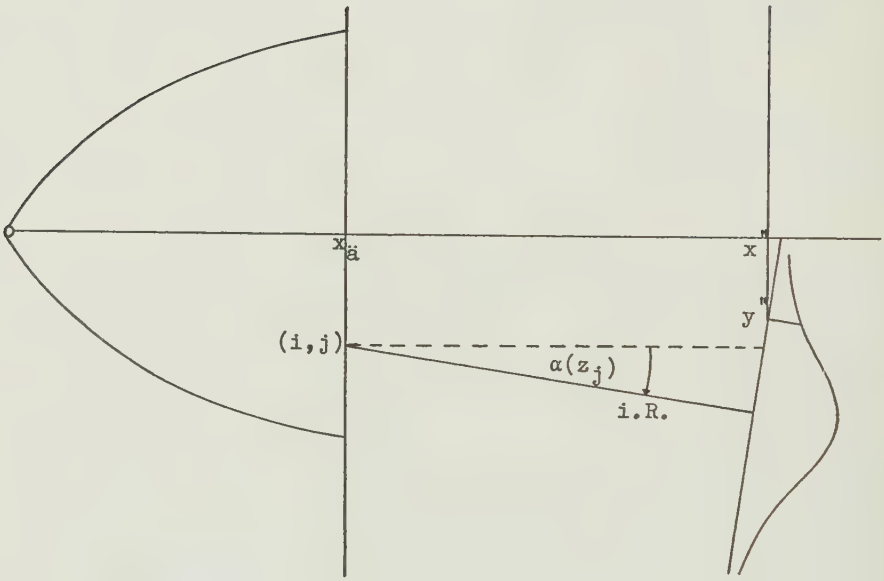


Abb. 8: Berechnung des Beitrags der Elementarquelle (i,j) zur Konzentration im Punkte (x'',y'',z'') (i.R. kennzeichnet die individuelle Rauchfahnenachse der Elementarquelle (i,j)).

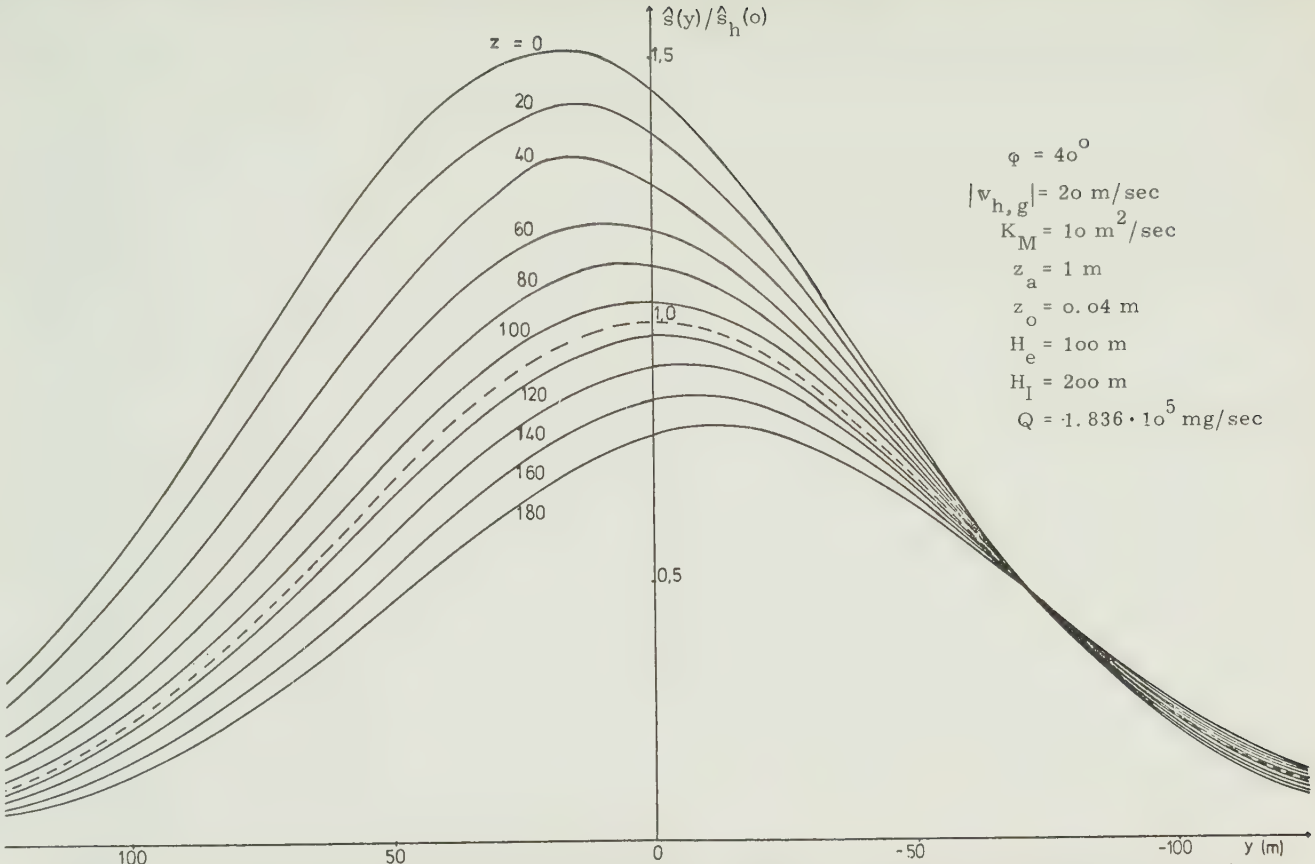


Abb. 9: Lateralschnitt durch die berechnete Konzentrationsverteilung in einem EKMANschen Windfeld in einer Entfernung von 8oo m vom Quellort.

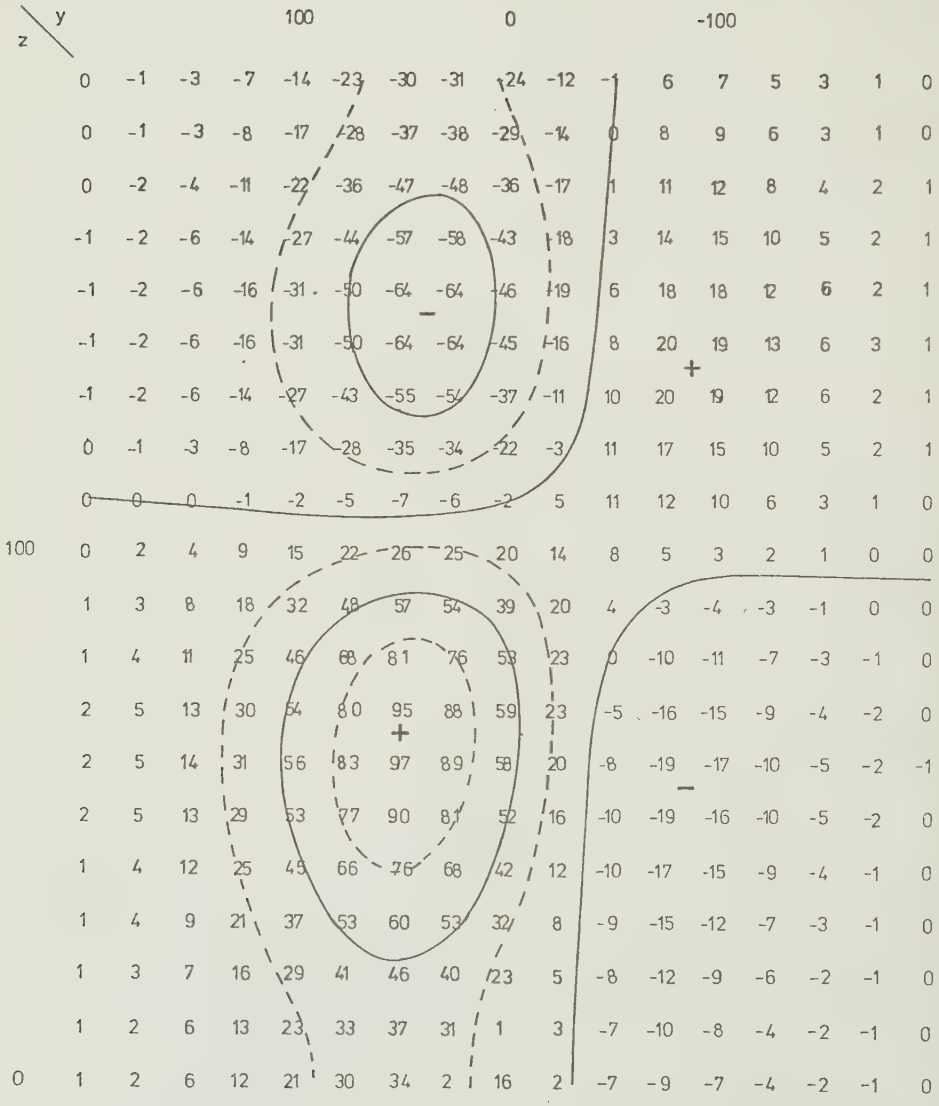


Abb. 1o: Differenz zwischen der für ein EKMANsches und der für ein homogenes Windfeld berechneten Konzentrationsverteilung in einer Entfernung von 8oo m vom Quellort. Die beiden Windfelder wurden so angepaßt, daß die Windvektoren in der Quellhöhe H_e übereinstimmen.

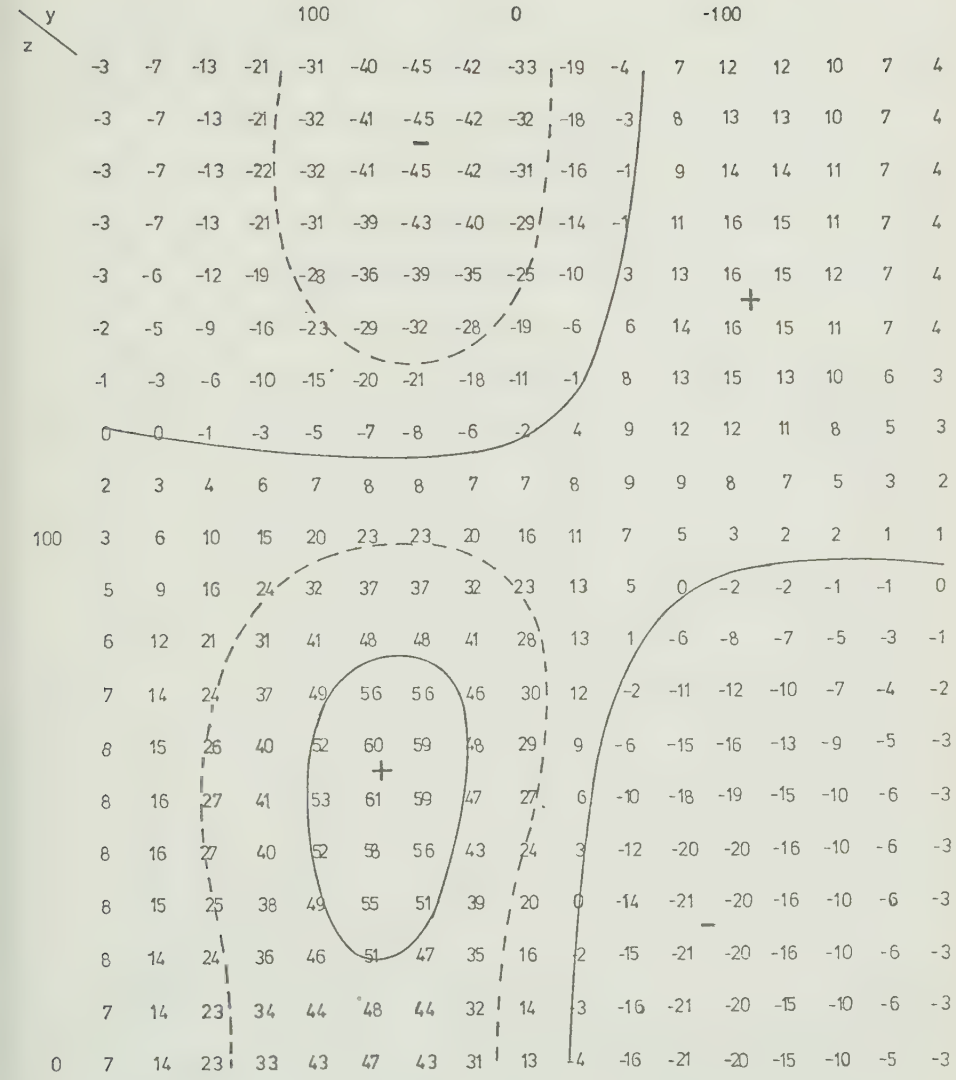
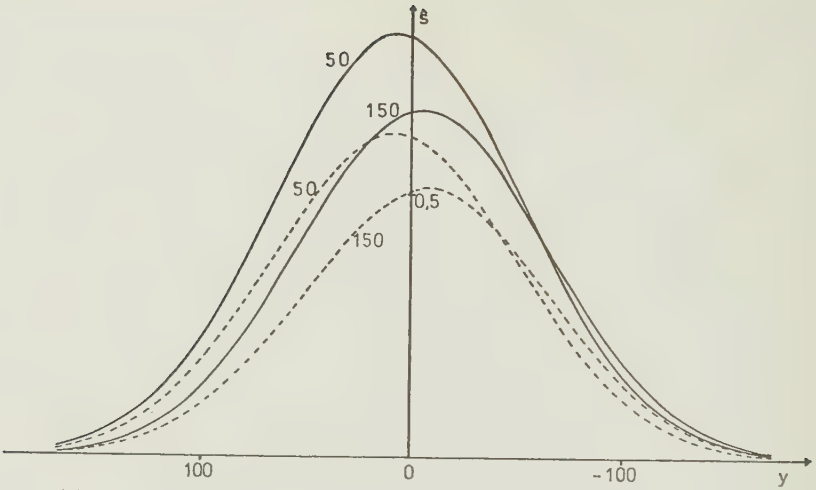
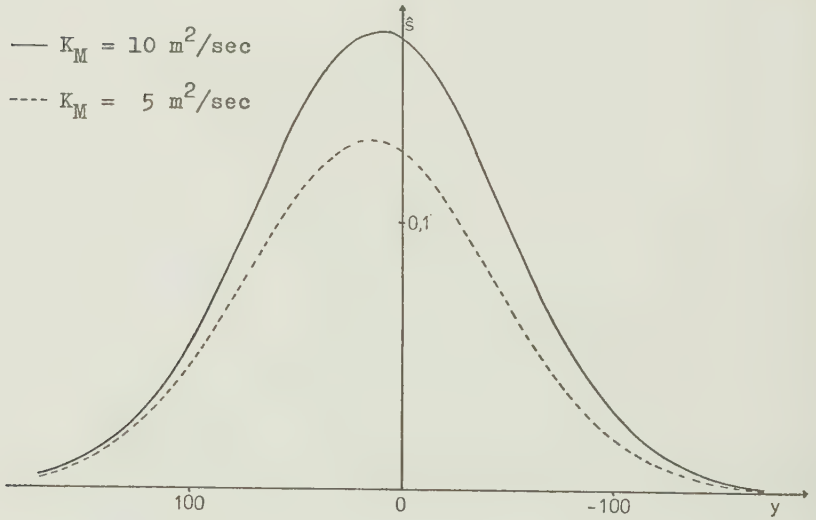


Abb. 11: Differenz zwischen der für ein EKMANsches und der für ein homogenes Windfeld berechneten Konzentrationsverteilung in einer Entfernung von 1100 m vom Quellort. Die beiden Windfelder wurden so angepaßt, daß die Windvektoren in der Quellhöhe H_e übereinstimmen (Einheit: $\mu g/m^3$).



(a) Konzentrationsverteilung in den Höhen 5o und 15o m



(b) Bodenkonzentrationsfeld

Abb. 12: Einfluß des Wertes für den Austauschkoeffizienten K_M in einem EKMANschen Windprofil auf die Konzentrationsverteilung (Entfernung vom Quellpunkt 8oo m).
($\varphi = 52^o$, $|v_g| = 2o$ m/sec, $z_a = 1o$ m, $z_o = o.o2$ m, $H_e = 1oo$ m, $H_I = 2oo$ m, $Q = 1.836 \cdot 1o^5$ mg/sec).

beträchtliche Erhöhung der Konzentrationswerte zu verzeichnen; die höhere Windgeschwindigkeit oberhalb der effektiven Emissionshöhe bewirkt analog eine Reduzierung der dortigen Konzentrationswerte. Diese Aussage wird wesentlich und in beachtenswerter Weise relativiert durch den Effekt der Windrichtungsänderung. Die Linksabweichung der Windrichtung unterhalb der Rauchfahnenachse (die y-Achse des Koordinatensystems sei so orientiert, daß diese Linksabweichung in Richtung der positiven y-Achse weise) macht sich in der Konzentrationsverteilung dadurch bemerkbar, daß für positive Abszissenwerte eine Verstärkung der Konzentrationserhöhung auftritt und daß für negative Abszissenwerte eine Abschwächung derselben erfolgt. Entsprechend verursacht die Rechtsabweichung der Windrichtung oberhalb der Rauchfahnenachse für positive Abszissenwerte eine Verstärkung der Konzentrationserniedrigung und eine Abschwächung für negative Abszissenwerte.

Zusammenfassend lassen sich zwei bedeutsame Feststellungen treffen:

1. Ein EKMANsches Windfeld übt, verglichen mit einem homogenen Feld, einen beträchtlichen Einfluß auf die Struktur der Konzentrationsverteilung in einer Rauchfahne aus; insbesondere wird das Bodenkonzentrationsfeld entscheidend modifiziert im Sinne einer Konzentrationserhöhung unter dem Einfluß der niedrigen Windgeschwindigkeit in Bodennähe und einer Verlagerung des Ortes der Maximalkonzentration unter dem Einfluß der EKMANschen Winddrehung.
2. Im gesamten Rauchfahnenbereich erfolgt für positive Abszissenwerte eine gegenseitige Verstärkung der Effekte der Windrichtungs- und -geschwindigkeitsänderung mit der Höhe; für negative Abszissenwerte wirken beide Effekte im gesamten Rauchfahnenbereich einander entgegen.

Zur Verdeutlichung dieser Aussagen sind in den Abbildungen 1o und 11 die Differenzen zwischen den Konzentrationsverteilungen in einem EKMANschen und in einem homogenen Windfeld in 8oo und 11oo m Entfernung vom Quellort aufgetragen. Man erkennt deutlich:

1. eine Verschiebung des Maximums dieser Differenz mit wachsender Entfernung von der Quelle als Folge der Winddrehung,
2. eine beträchtliche Erhöhung der Bodenkonzentration in einem großen Bereich,
3. infolge der gegenläufigen Wirkung von Windrichtungs- und -geschwindigkeitsänderung im Bereich negativer Abszissenwerte (von - 75 bis - 175 m Entfernung von der Rauchfahnenachse) ist die Konzentrationsverteilung fast identisch mit der bei einem homogenen Windfeld.

Abbildung 12 zeigt durch den Vergleich zweier Rechnungen für unterschiedliche Werte des Austauschkoeffizienten K_M in einem EKMANschen Windfeld (K_M = 5 bzw. 1o m^2/sec) einmal mehr, in wie starkem Maße das Bodenkonzentrationsfeld vom Turbulenzzustand der Atmosphäre abhängig ist und dokumentiert, daß für zahlreiche Fragestellungen eine Berücksichtigung der vertikalen Strukturierung der Atmosphäre für die Ausbreitungsrechnung unerläßlich ist. Es sei an dieser Stelle noch einmal betont, daß eine solche Forderung zugleich die detaillierte Kenntnis adäquater Dispersionsparameter beinhaltet.

Ergänzend sei im Hinblick auf Ausbreitungsprobleme diese EKMAN-

TAYLORsche Theorie der planetarischen Grenzschicht kurz mit dem von GRIESSEIER (1969) in Anlehnung an FORTAKs Theorie der Mehrfachfilterung (FORTAK (1968)) vorgeschlagenen Konzept der Einbeziehung kleinkonvektiver Prozesse verglichen, in dem zusätzlich zur turbulenten noch eine kleinkonvektive Reibungsbeschleunigung $\overset{*}{\varkappa} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial z}$ mit positiven Koeffizienten $\overset{*}{\varkappa}$ eingeführt wird, so daß sich als totale subskalige Reibungsbeschleunigung der Ausdruck

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{z,h}}{\partial z} = K_M \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial z^2} + \overset{*}{\varkappa} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial z}$$

ergibt. Hinsichtlich der Lösung der quasistatisch approximierten hydrodynamischen Gleichungen mit diesem Ansatz sei auf die Originalarbeit verwiesen.

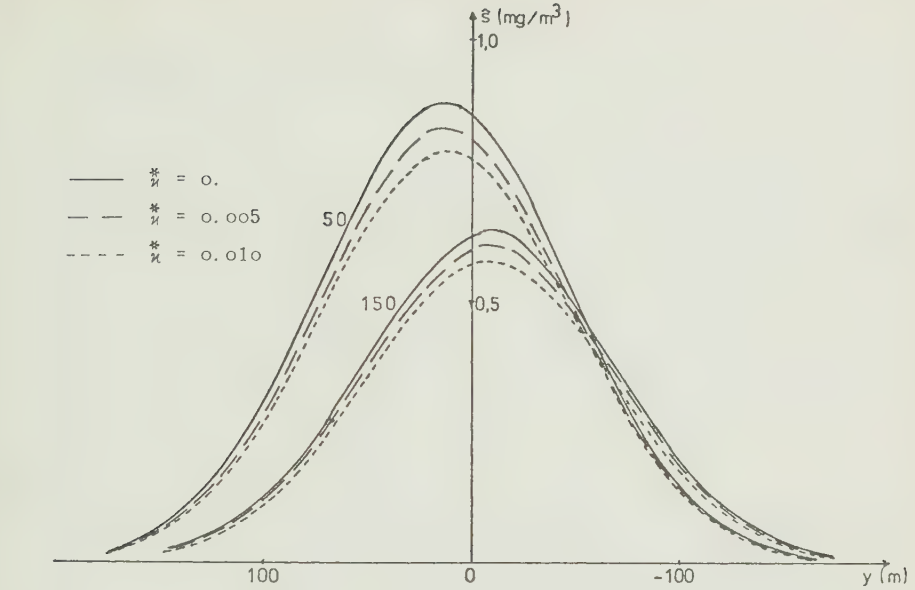
Zur Durchführung der Vergleichsrechnungen werden die vertikalen Windrichtungsänderungen gemessen relativ zur jeweiligen Windrichtung in der effektiven Quellhöhe H_e. Der geostrophische Wind sei mit $|v_{h,g}| = 2o\,m/sec$ und der Austauschkoeffizient mit $K_M = 5\,m^2/sec$ vorgegeben. Als geographische Breite sei $\varphi = 4o^o$ angenommen. Die Rechnungen werden durchgeführt für eine kontinuierliche Punktquelle mit einer effektiven Quellhöhe von $H_e = 1oo\,m$ und einer Quellstärke von $Q = 1.836 \cdot 1o^5\,mg/sec$.

Die Anwendung des in Kapitel 2 vorgeschlagenen Verfahrens auf das durch diese Lösung beschriebene Windfeld liefert im Prinzip eine ähnliche Konzentrationsverteilung wie die EKMAN-TAYLORsche Theorie der planetarischen Grenzschicht, die aus dieser Lösung als Grenzfall mit $\overset{*}{\varkappa} = o$ hervorgeht. Dieses Verhalten zeigt Abbildung 13, in der für verschiedene Werte des Koeffizienten $\overset{*}{\varkappa}$ die vertikalen Windprofile und die Konzentrationsverteilungen in 5o und 15o m Höhe wiedergegeben sind. Durch die Wirkung der kleinkonvektiven Zusatzbewegungen wird der Gradient der Windgeschwindigkeit vergrößert und dadurch der Konzentrationswert verringert. Andererseits werden die Konzentrationsverteilungen, dadurch daß die Windrichtungsänderungen relativ zur jeweiligen Windrichtung in der effektiven Quellhöhe geringer sind, etwas symmetrischer.

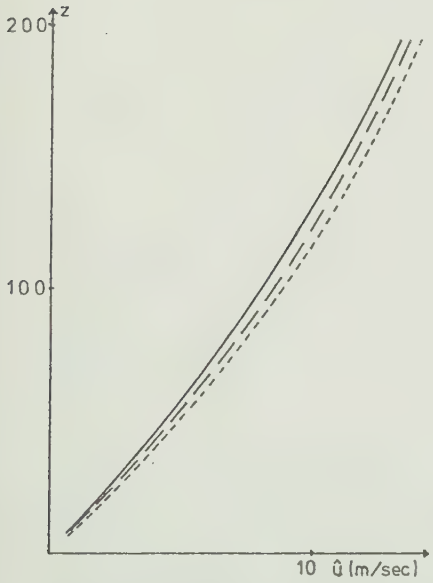
3.1.3 Die ELLISONsche Lösung für ein Windfeld in der planetarischen Grenzschicht unter Berücksichtigung eines höhenabhängigen Austauschkoeffizienten und eines höhenabhängigen geostrophischen Windes.

Für eine weitergehende Untersuchung des Einflusses der Physik der planetarischen Grenzschicht auf die Ausbreitung von Luftbeimengungen wird einerseits die Einbeziehung des thermischen Windes, insbesondere aber, wie LETTAU (1967) betont, die Berücksichtigung der Höhenabhängigkeit des Austauschkoeffizienten von ausschlaggebender Bedeutung sein.

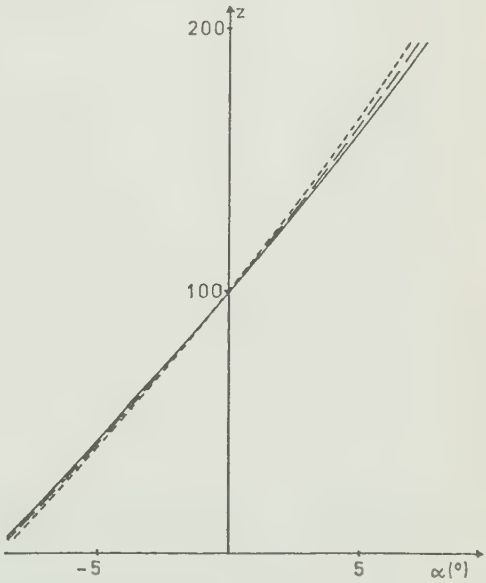
Eine der wenigen analytischen Lösungen der quasistatisch approximierten hydrodynamischen Gleichungen für das Windfeld in der planetarischen Grenzschicht, die einer solchen Forderung wenigstens für einen vereinfach-



(a) Konzentrationsverteilung in einer Höhe von 5o und 15o m



(b) Geschwindigkeitsprofil



(c) Windrichtungsprofil

Abb. 13: Einfluß konvektiver Zusatzbewegungen auf das Konzentrationsfeld einer Punktquelle.

ten Fall nachkommt, wurde von ELLISON (1956) angegeben. Seine Lösung geht von einer linearen Variation des Austauschkoeffizienten K_M mit der Höhe aus

$$K_M = u_* k z ,$$

in der k die VON KARMANsche Konstante und u_* die Schubspannungsgeschwindigkeit bedeuten, und gestattet zugleich eine einfache Erweiterung auf den Fall einer linearen Variation des geostrophischen Windes mit der Höhe. Bei ELLISON nimmt die turbulente Reibungsbeschleunigung die Form an

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{z,h}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_M \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial z}\right) = k u_* \left(\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial z^2}\right) .$$

Mit den Definitionen

$$X := \sqrt{\frac{4 f z}{k u_*}}$$

und

$$W = (\hat{u}_g - \hat{u}) - i(\hat{v}_g - \hat{v})$$

und dem obigen Ausdruck für die turbulente Reibungsbeschleunigung nimmt die hydrostatisch approximierte Bewegungsgleichung die Gestalt der folgenden Differentialgleichung an

$$X^2 \frac{d^2 W}{dX^2} + X \frac{dW}{dX} + i X^2 W = o ,$$

die einer BESSELschen Differentialgleichung nullter Ordnung entspricht. Sie besitzt als Lösung, die für große Werte von X endlich bleibt, die HANKELschen BESSEL-Funktionen dritter Art der Ordnung Null mit komplexen Argument

$$W = A H_o^{(1)}(\sqrt{i}\, X),$$

in der sich der Proportionalitätsfaktor A aus einer Anpassung des resultierenden Windfeldes an ein logarithmisches Profil in der bodennahen Grenzschicht zu

$$A = i \pi u_* / k$$

bestimmt. Die HANKELschen Funktionen setzen sich additiv aus BESSEL- und NEUMANNschen Funktionen zusammen

$$H_\nu^{(1)}(X) = J_\nu(X) + i Y_\nu(X);$$

ihre Berechnung wurde für die hier vorliegende ganzzahlige Ordnung mit Hilfe der Reihenentwicklungen

$$J_\nu(X) = \frac{1}{X^n} \sum_{s=o}^{\infty} \frac{(-1)^s X^{2n+2s}}{s!\,(n+s)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2s} ,$$

$$Y_\nu(X) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \log\left(\frac{1}{2}X\right)\right) J_\nu(X) - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\nu-1} \frac{(\nu - r - 1)!}{r!} \left(\frac{2}{X}\right)^{\nu - 2r} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{2}X\right)^{\nu + 2r}}{r!\,(\nu + r)!} \{\Phi(r+\nu) + \Phi(r)\}$$

vorgenommen, wobei $\gamma = 0.577216$ die EULERsche Konstante bedeutet und $\Phi(r)$ durch die Summe

$$\Phi(r) := \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{s}$$

definiert ist. Die Ergebnisse dieser Reihenentwicklungen wurden an tabellarisch publizierten Werten (siehe z. B. JAHNKE und EMDE (1945) und UHDE (1964)) für BESSELsche und NEUMANNsche Funktionen sowie für die KELVINschen Funktionen

$$\begin{aligned} \mathrm{ber}(X) &:= \mathrm{Re}\, J_0(\sqrt{i}X), \\ \mathrm{bei}(X) &:= -\mathrm{Jm}\, J_0(\sqrt{i}X), \\ \mathrm{her}(X) &:= -\mathrm{Re}\, H_0^{(1)}(\sqrt{i}X), \\ \mathrm{hei}(X) &:= \mathrm{Jm}\, H_0^{(1)}(\sqrt{i}X) \end{aligned}$$

getestet; es wurde für alle Werte des Argumentes X eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit den publizierten Werten bei günstiger Rechenzeit registriert.

Für die Geschwindigkeitskomponenten des ELLISONschen Windfeldes gilt dann

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \hat{u}_g + \frac{A}{i}\,\mathrm{hei}(X), \\ \hat{v} &= \hat{v}_g - \frac{A}{i}\,\mathrm{her}(X). \end{aligned}$$

Die durch diese Lösung erzeugten Wind- und Konzentrationsfelder seien im folgenden kurz diskutiert.

Zunächst einmal erkennt man aus Abbildung 14, wie gut durch die obige Lösung ein logarithmisches Windprofil in der bodennahen Grenzschicht approximiert wird; dieser Effekt läßt sich verdeutlichen durch die asymptotische Darstellung der HANKELschen Funktion für kleine Werte von X

$$H_0^{(1)}(\sqrt{i}X) \sim \frac{1}{2} + \frac{2i}{\pi}\left(\log X - \log 2 + \gamma\right).$$

Auf die gesamte Ausbreitungsschicht bezogen, erweist sich jedoch der Ansatz $K_M = u_* k z$ für den turbulenten Austauschkoeffizienten als zu vereinfacht, so daß das durch die ELLISONsche Lösung vorhergesagte Verhältnis zwischen den Werten der Bodenwindgeschwindigkeit und -richtung und denen des geostrophischen Windes nicht in voller Übereinstimmung mit den Beobachtungen steht; eine Verbesserung dieser Resultate läßt sich prinzipiell über die Formulierung eines geeigneten Mischungsweges (siehe z. B. BLACKADAR (1962) oder WIPPERMANN (1972)) erzielen. Da hier jedoch

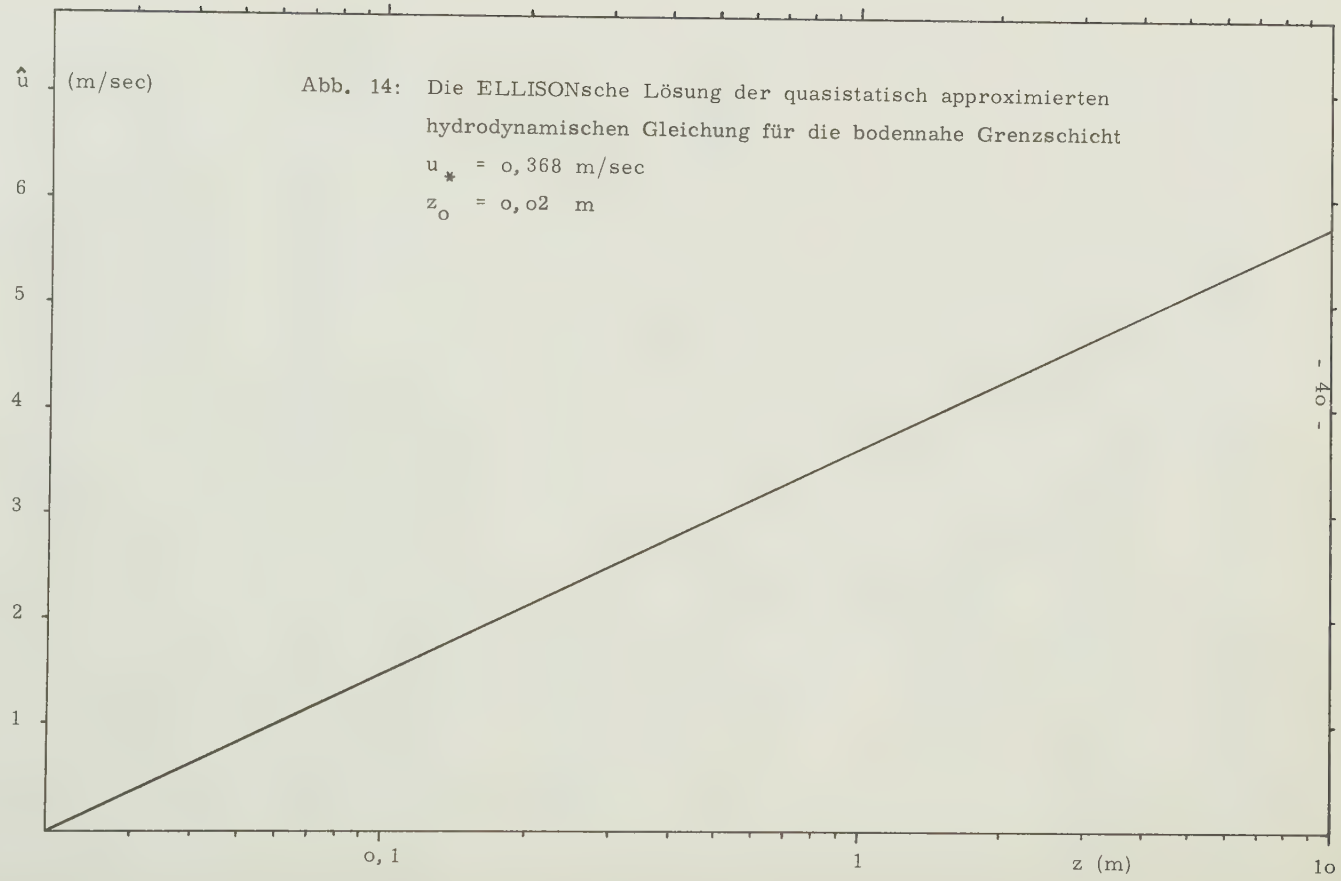


Abb. 14: Die ELLISONsche Lösung der quasistatisch approximierten hydrodynamischen Gleichung für die bodennahe Grenzschicht

$u_* = o,368$ m/sec

$z_o = o,o2$ m

lediglich die Praktikabilität eines Modells für den Ausbreitungsvorgang von Luftbeimengungen demonstriert, nicht aber die Güte einer Grenzschichttheorie untersucht werden soll, sei auf die ELLISONsche analytische Lösung zurückgegriffen, die zugleich eine direkte Berücksichtigung des thermischen Windes für den Fall eines konstanten horizontalen Temperaturgradienten gestattet. Unter diesen Bedingungen ergibt sich eine lineare Variation des geostrophischen Windes mit der Höhe

$$\hat{v}_{h,g} = (\hat{v}_{h,g})_o + \mathbb{C}_h z \,,$$

und die Ausgangsgleichungen lassen sich in der Form

$$\hat{u}_g - \hat{u} + \frac{u_* k}{f} C_y + \frac{u_* k}{f} \frac{d}{dz}\left(z \frac{d}{dz}\left[\hat{v} - \hat{v}_g + \frac{k u_*}{f} C_x \right] \right) = o \,,$$

$$\hat{v}_g - \hat{v} - \frac{u_* k}{f} C_x - \frac{u_* k}{f} \frac{d}{dz}\left(z \frac{d}{dz}\left[\hat{u} - \hat{u}_g - \frac{k u_*}{f} C_y \right] \right) = o$$

schreiben. Die Struktur der Lösung bleibt erhalten, wenn man definiert

$$W = \hat{u}_g - \hat{u} + \frac{k u_*}{f} C_y - i\left(\hat{v}_g - \hat{v} - \frac{k u_*}{f} C_x \right) .$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten der ELLISONschen Lösung gilt damit

$$\hat{u} = \hat{u}_g + \frac{u_* k}{f} C_y + \frac{A}{i} \mathrm{hei}(X) \,,$$

$$\hat{v} = \hat{v}_g - \frac{u_* k}{f} C_x - \frac{A}{i} \mathrm{her}(X) \,.$$

Anhand einiger ausgewählter Fälle seien die Ergebnisse der Ausbreitungsrechnungen für ein durch diese Lösung beschriebenes Windfeld exemplarisch erläutert. Aus den Gleichungen für die Änderung des geostrophischen Windes mit der Höhe (siehe z. B. FORTAK, Vorlesungen über theoretische Meteorologie) läßt sich leicht abschätzen, daß ein horizontaler Temperaturgradient von $1^oC/1oo$ km einen vertikalen Gradienten des geostrophischen Windes von ca. $3 \cdot 1o^{-3}$ sec^{-1} bewirkt. Diese Größenordnung diene als Richtwert für die zu verwendenden Werte von C_x und C_y.

In der Abbildung 15 sind zwei interessante Einzelfälle, die durch (geostrophische) Warm- bzw. Kaltluftadvektion gekennzeichnet sind, dem Fall höhenkonstanten geostrophischen Windes gegenübergestellt. Im unteren Teil der Abbildung sind die zugehörigen typischen meteorologischen Situationen unter Verwendung der approximierten thermischen Windgleichung skizziert worden. Die Parameterwahl

$$C_x = 1 \cdot 1o^{-3} \text{ sec}^{-1} \quad , \quad C_y = 1 \cdot 1o^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

beinhaltet (geostrophische) Kaltluftadvektion, verbunden mit einer Linksdrehung des geostrophischen Windes unter gleichzeitiger Geschwindigkeitszunahme mit der Höhe. Demgegenüber kennzeichnet die Parameterwahl

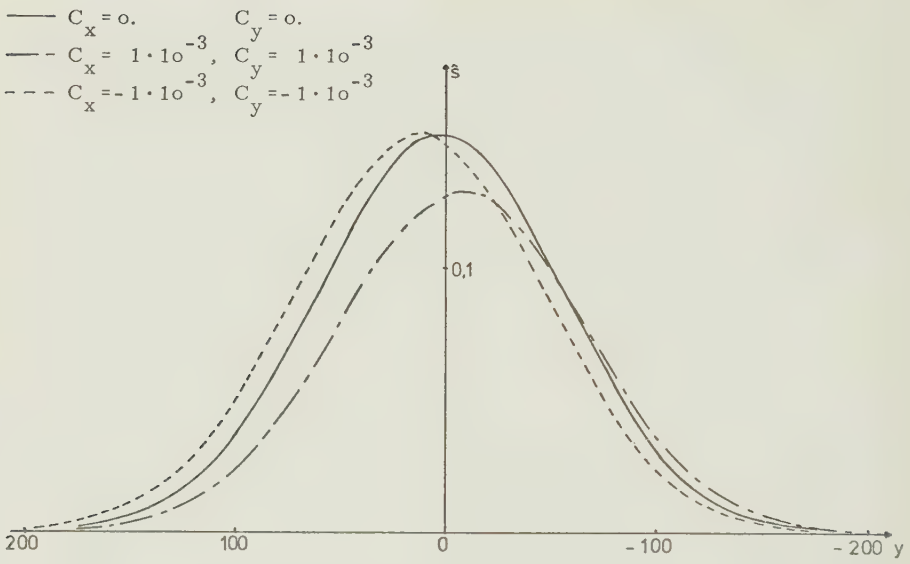
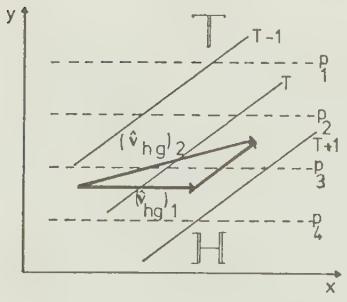
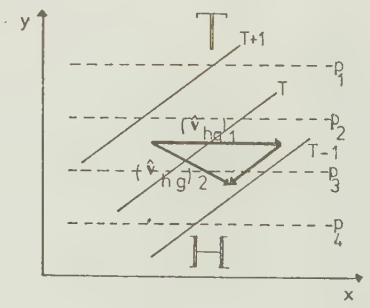


Abb. 15: Der Einfluß des thermischen Windes auf das Bodenkonzentrationsfeld einer kontinuierlichen Punktquelle in 8oo m Entfernung vom Quellort.



$C_x = 1 \cdot 1o^{-3}$, $C_y = 1 \cdot 1o^{-3}$
(geostrophische) Kaltluftadvektion



$C_x = -1 \cdot 1o^{-3}$, $C_y = -1 \cdot 1o^{-3}$
(geostrophische) Warmluftadvektion

$$C_x = -1 \cdot 10^{-3}\ \text{sec}^{-1} \quad , \quad C_y = -1 \cdot 10^{-3}\ \text{sec}^{-1}$$

eine (geostrophische) Warmluftadvektion, die mit einer Rechtsdrehung des geostrophischen Windes mit der Höhe verbunden ist.

Für den Vergleich wurden die Rechnungen so angepaßt, daß die geostrophischen Windvektoren in dem nach ELLISON durch

$$z_g = \frac{e\,k\,u_*}{4f}$$

(e: Basis der natürlichen Logarithmen) definierten geostrophischen level z_g zusammenfallen.

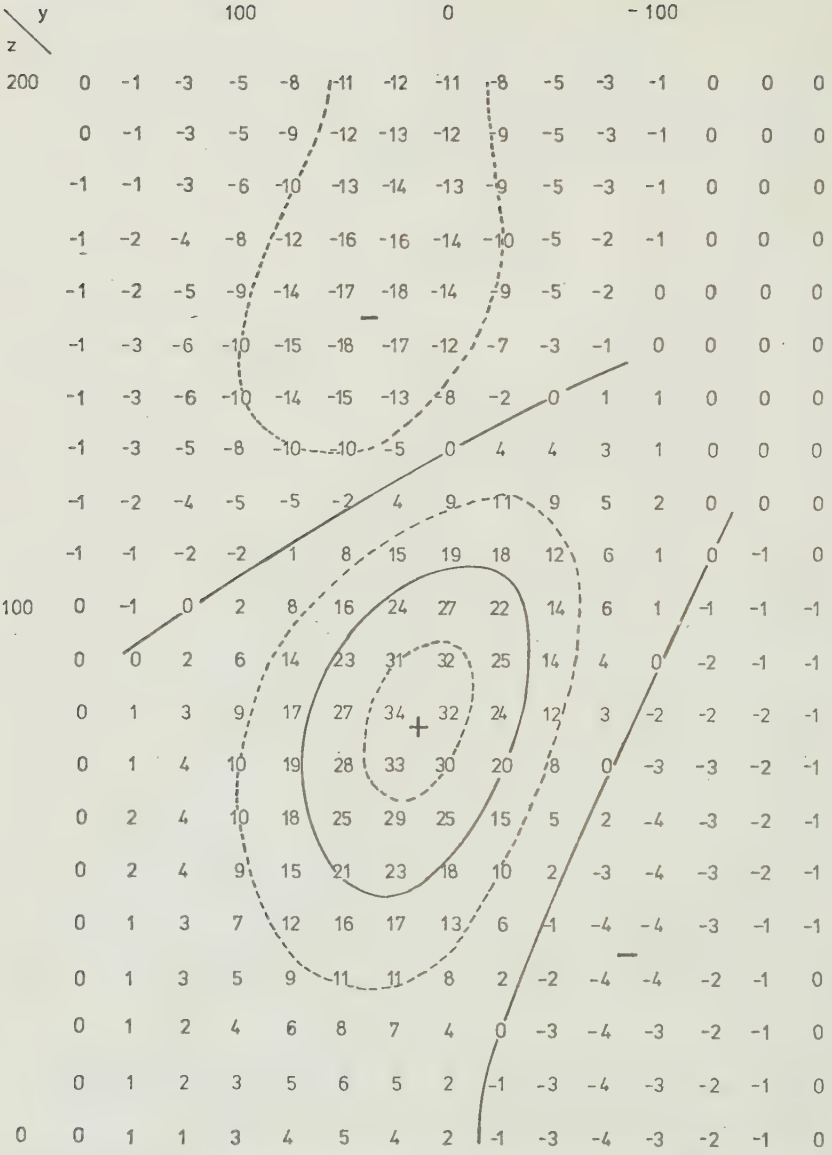
Es wird angenommen, daß die Luftbeimengungen von einer kontinuierlichen Punktquelle in einer geographischen Breite von $\varphi = 55^o$, einer effektiven Quellhöhe von H_e = 100 m mit einer Quellstärke von $Q = 1.836 \cdot 10^5$ mg/sec emittiert werden und sich in einem ELLISONschen Windfeld ausbreiten, das durch die Parameter $u_* = 0.368$ m/sec und $z_o = 0.02$ m bestimmt ist. Die Komponenten des geostrophischen Windes sind in ELLISONs Lösung dann eindeutig festgelegt.

In Abbildung 15 ist die resultierende Bodenkonzentrationsverteilung dargestellt; dabei wurden die Windrichtungen wieder relativ zur jeweiligen Windrichtung in der effektiven Quellhöhe gemessen. Man erkennt, daß sich die durch Kalt- bzw. Warmluftadvektion bewirkte Links- bzw. Rechtsdrehung des geostrophischen Windes in einer Verlagerung des Maximums der Bodenkonzentration nach rechts respektive links relativ zur Windrichtung in der Höhe H_e und relativ zur Lage des Maximums im Falle eines höhenkonstanten geostrophischen Windes ($C_x = 0$, $C_y = 0$) äußert. Entsprechend schlägt sich die Windzu- bzw. -abnahme in einer Erniedrigung bzw. Erhöhung der jeweiligen Konzentrationswerte nieder.

Die Abbildungen 16 und 17 gestatten einen direkteren Vergleich der Fälle $C_x = 0$, $C_y = 0$ (höhenkonstanter geostrophischer Wind) und $C_x = 1 \cdot 10^{-3}$, $C_y = 1 \cdot 10^{-3}$ ((geostrophische) Kaltluftadvektion), indem sie, analog zu den Abbildungen 10 und 11, die Differenz zwischen der für das jeweilige Windfeld und der für das zugehörige homogene Windfeld berechneten Konzentrationswerte wiedergeben. Die Ausbreitungsschicht ist wiederum durch die Vorgabe einer Inversion in der Höhe H_I = 200 m in der Vertikalen begrenzt.

Abbildung 16 weist im großen und ganzen eine ähnliche Struktur auf, wie sie für das EKMANsche Windfeld ermittelt wurde. Sie ist jedoch nicht völlig kompatibel mit Abbildung 10, da die zugrundegelegten Austauschkoeffizienten unterschiedlicher Natur sind und die Lösungen ein quantitativ unterschiedliches Verhalten aufweisen.

In Abbildung 17 kommt die Linksdrehung bei (geostrophischer) Kaltluftadvektion auch im berechneten Konzentrationsfeld deutlich zum Ausdruck; die zu den Abbildungen 10 und 11 gemachten Bemerkungen lassen sich sinngemäß übertragen.



z \ y	100						0						- 100		
200	0	-1	-3	-5	-8	-11	-12	-11	-8	-5	-3	-1	0	0	0
	0	-1	-3	-5	-9	-12	-13	-12	-9	-5	-3	-1	0	0	0
	-1	-1	-3	-6	-10	-13	-14	-13	-9	-5	-3	-1	0	0	0
	-1	-2	-4	-8	-12	-16	-16	-14	-10	-5	-2	-1	0	0	0
	-1	-2	-5	-9	-14	-17	-18	-14	-9	-5	-2	0	0	0	0
	-1	-3	-6	-10	-15	-18	-17	-12	-7	-3	-1	0	0	0	0
	-1	-3	-6	-10	-14	-15	-13	-8	-2	0	1	1	0	0	0
	-1	-3	-5	-8	-10	-10	-5	0	4	4	3	1	0	0	0
	-1	-2	-4	-5	-5	-2	4	9	11	9	5	2	0	0	0
	-1	-1	-2	-2	1	8	15	19	18	12	6	1	0	-1	0
100	0	-1	0	2	8	16	24	27	22	14	6	1	-1	-1	-1
	0	0	2	6	14	23	31	32	25	14	4	0	-2	-1	-1
	0	1	3	9	17	27	34	32	24	12	3	-2	-2	-2	-1
	0	1	4	10	19	28	33	30	20	8	0	-3	-3	-2	-1
	0	2	4	10	18	25	29	25	15	5	2	-4	-3	-2	-1
	0	2	4	9	15	21	23	18	10	2	-3	-4	-3	-2	-1
	0	1	3	7	12	16	17	13	6	-1	-4	-4	-3	-1	-1
	0	1	3	5	9	11	11	8	2	-2	-4	-4	-2	-1	0
	0	1	2	4	6	8	7	4	0	-3	-4	-3	-2	-1	0
	0	1	2	3	5	6	5	2	-1	-3	-4	-3	-2	-1	0
0	0	1	1	3	4	5	4	2	-1	-3	-4	-3	-2	-1	0

Abb. 16: Differenz zwischen der für ein ELLISONsches Windfeld mit höhenkonstantem geostrophischen Wind (C_x = o, C_y = o) und der für ein homogenes Windfeld berechneten Konzentrationsverteilung in 800 m Entfernung vom Quellort.

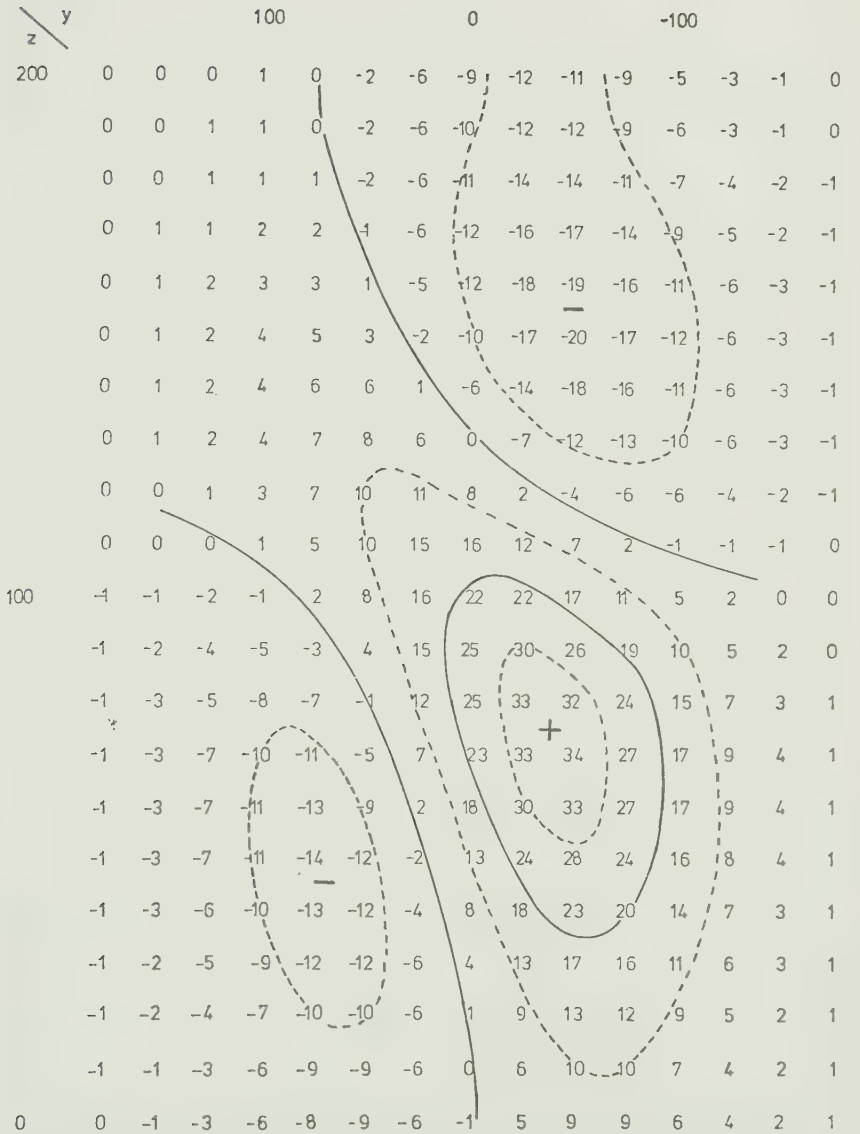


Abb. 17: Differenz zwischen der für ein ELLISONsches Windfeld mit (geostrophischer) Kaltluftadvektion ($C_x = 1 \cdot 10^{-3}$, $C_y = 1 \cdot 10^{-3}$) und der für ein homogenes Windfeld berechneten Konzentrationsverteilung in einer Entfernung von 800 m vom Quellort (Einheit: $\mu g/m^3$).

3.1.4 Vorgabe real gemessener Windprofile

Als Beispiel für die Vorgabe real gemessener Windprofile seien Messungen aus St. Peter-Ording verwandt, die mittels Pilotballonaufstiegen im Doppelanschnittverfahren gewonnen wurden. Die Messungen wurden am 15. 6. 1972 in der Zeit von 17^{55} bis 18^{25} Uhr in einer meteorologischen Situation vorgenommen, die durch eine Land-See-Wind-Zirkulation gekennzeichnet war. Parallelmessungen mit Schalenkreuzanemometern erlaubten einen Anschluß an ein logarithmisches Windprofil in Bodennähe. Mit Hilfe linearer Interpolation für Zwischenwerte ergab sich die im unteren Teil der Abbildung 18 bis zu einer Höhe von ca. 4oo m dargestellte Windverteilung. Die Messungen wurden in Ufernähe auf einer Sandbank vorgenommen, damit erscheint die Annahme gerechtfertigt, daß durch das Land-See-Wind-Zirkulationssystem, das sich häufig bis zu 5o km landeinwärts erstreckt, an diesem Meßort keine Vertikalkomponenten der Windgeschwindigkeit erzeugt wurden. Rauchfahnenachsen können in diesem Bereich des Systems als horizontal ausgerichtet angenommen werden.

Um die Ausbreitung von Luftbeimengungen in einem solchen Windfeld zu untersuchen, sei eine Quelle mit einer effektiven Quellhöhe von 15o m und einer Quellstärke von $1.836 \cdot 1o^5$ mg/sec vorgegeben. Da von diesem Zeitpunkt keine Temperaturmessungen vorliegen, wird zur Kennzeichnung der Ausbreitungsbedingungen, der Uhrzeit entsprechend, eine neutrale atmosphärische Schichtung angenommen.

In Abbildung 18 ist, in der Form eines Lateralschnittes in einer Entfernung von 8oo m vom Quellort, die Differenz zwischen der für das gemessene Windprofil und der für ein homogenes Windfeld berechneten Konzentrationsverteilung aufgetragen. Dabei ist das homogene Windfeld durch die Windrichtungs- und -stärkenangaben des gemessenen Profils in der Quellhöhe H_e definiert.

Das Differenzfeld weist unterhalb von H_e große Ähnlichkeiten mit dem entsprechenden Feld beim Vorliegen einer EKMANschen Windspirale (Abb. 1o) auf. Oberhalb von H_e weist es jedoch nicht die markante Asymmetrie der Abbildung 1o auf. Dafür sind zwei Faktoren verantwortlich: zum einen ist die vertikale Windrichtungsänderung wesentlich geringer als unterhalb von H_e, zum anderen macht sich in diesen Höhen bereits die für Land-See-Wind-Zirkulationssysteme charakteristische Geschwindigkeitsabnahme mit der Höhe bemerkbar, die sich bis zu einem Umkehrpunkt (in diesem Fall in der Höhe von ca. 14oo m) erstreckt. Beide Aspekte zusammengenommen bewirken das Auftreten relativ geringer Differenzen oberhalb von H_e.

3.2 Der Einfluß vertikaler Änderungen der Stabilität der atmosphärischen Schichtung auf die Ausbreitung von Luftbeimengungen

Eine Schwierigkeit, der in Ausbreitungsrechnungen bislang nicht hinreichend Rechnung getragen wird, erwächst aus dem oftmaligen Zusammenfallen derjenigen Zeitabschnitte im Tagesablauf, für die einerseits die Emission einiger Luftbeimengungen maximal wird und für die andererseits die vertikalen und zeitlichen Änderungen der atmosphärischen Stabilität

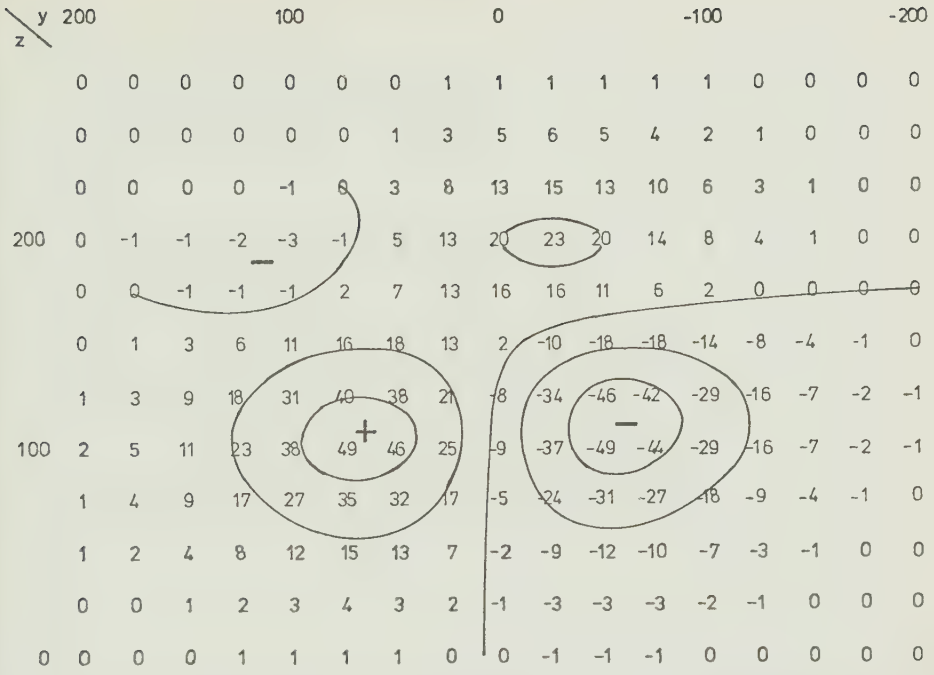
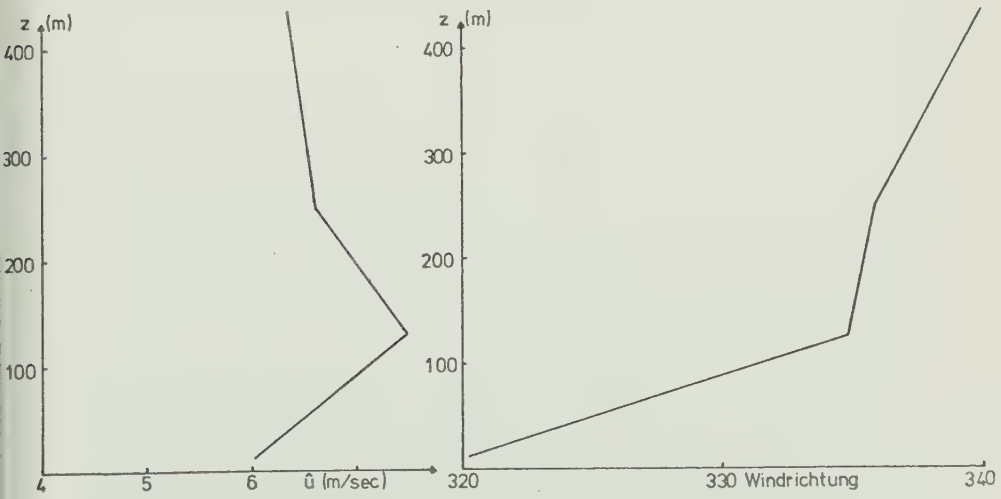


Abb. 18: Differenz zwischen der für das am 15.6.1972 gemessene Windprofil und der für ein homogenes Windfeld berechneten Konzentrationsverteilung (Einheit: $\mu g/m^3$).



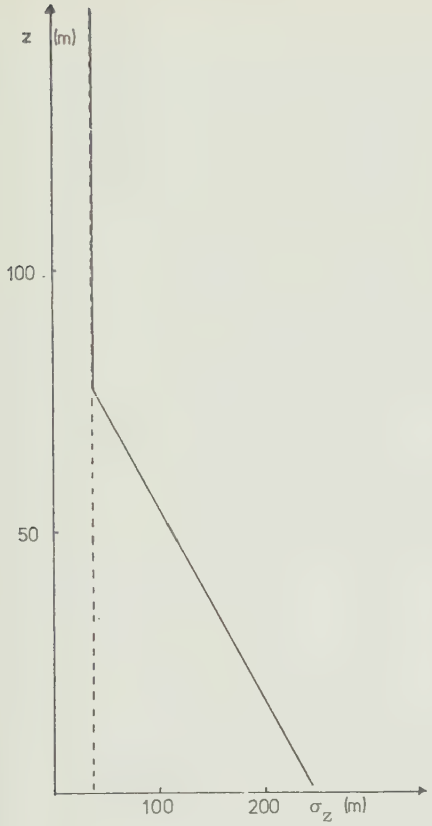
Gemessenes Windprofil: St. Peter-Ording 15.6.1972 ca. 18 Uhr.

besonders stark sind. Konsequenz dieser Koinzidenz ist, daß die Ausbreitung des größten Teils der emittierten Luftbeimengungen nachhaltig durch Instationaritäten und vertikale Inhomogenitäten beeinflußt wird. Ein Versuch, diesem Problem durch eine modifizierte Stabilitätsklassifikation beizukommen, wurde von KLUG (1968) unternommen, indem er für die beiden Stunden nach Sonnenauf- bzw.-untergang in Abhängigkeit von der effektiven Quellhöhe Zusatzvorschriften formulierte. Obwohl durch die Anwendung des KLUGschen Klassifikationsschemas in Diffusionsmodellen eine beträchtliche Verbesserung der Resultate zu erwarten ist, scheint ein solches Vorgehen für die Behandlung zahlreicher spezieller Ausbreitungsprobleme zu grob zu sein. Besonders deutlich wird das am Beispiel einer Fumigation-Situation. Solche Fälle erfordern eine eingehendere Berücksichtigung der vertikalen Variabilität der atmosphärischen Stabilität, ein Gesichtspunkt, auf den nur in wenigen Arbeiten eingegangen wurde. Die Lösung der Diffusionsgleichung unter Zugrundelegung eines Potenzgesetzes für den turbulenten Austauschkoeffizienten (SUTTON (1953)) ist ein Beispiel oder auch die Abschätzung der Dispersion aus dem asymptotischen Verhalten der Austauschkoeffizienten in der bodennahen Grenzschicht (YORDANOV (1968)). Am Flexibelsten erscheint WIPPERMANNs Anwendung einer random-walk Methode (WIPPERMANN (1966)), bei der die vertikale Schrittweite der 'springenden' Partikel als eine Funktion der lokalen Stabilität der atmosphärischen Schichtung angesetzt wird.

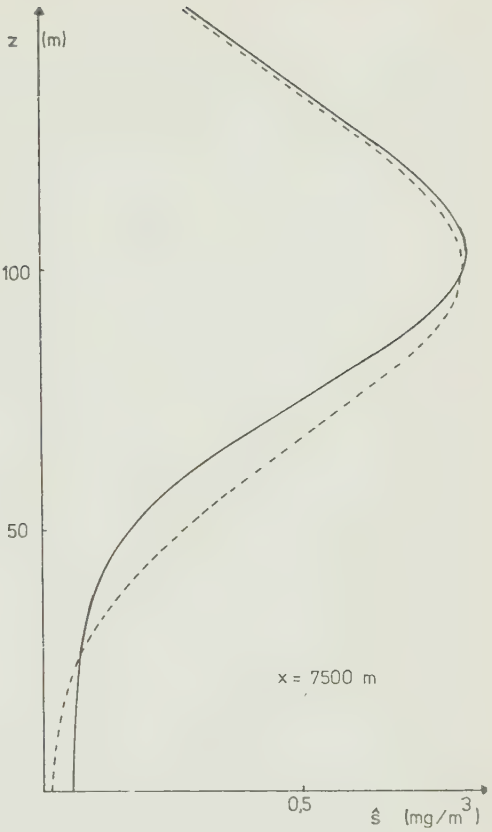
Das in Kapitel 2 diskutierte Verfahren gestattet die Vorgabe jedes beliebigen Vertikalprofils der Dispersionsparameter. Auf diese Weise können der von jeder Elementarquelle ausgehenden 'sub-Rauchfahne' charakteristische individuelle Diffusionseigenschaften zugeordnet werden. In Abbildung 19 wird der spezielle Fall einer linearen Abhängigkeit der Dispersionsparameter von der Höhe dargestellt, bei der die obere Grenze des Bereichs erhöhter Turbulenzintensität bereits bis in den eigentlichen Kern der Rauchfahne vorgedrungen ist.

Diese Erscheinung tritt häufig morgens auf; unter nächtlichen stabilen Bedingungen muß sich dazu die als 'fanning' bezeichnete Form der Rauchfahne ($t = t_1$) gebildet haben. Die Bodenerhitzung durch die aufgehende Sonne verursacht dann in den frühen Morgenstunden den allmählichen Aufbau einer zunächst neutralen, später instabilen Mischungsschicht, die beim Erreichen der Rauchfahnenhöhe ($t = t_2$) die Erscheinung des 'fumigation' bewirkt. Ihre Hauptbedeutung liegt darin, daß sie sehr große Bodenkonzentrationswerte in großen Entfernungen vom Quellort verursachen kann. Dabei handelt es sich jedoch lediglich um Kurzfristbelastungen, da die Zeitdauer einer Fumigation-Situation mit einigen Minuten bis zu zwei Stunden relativ gering ist.

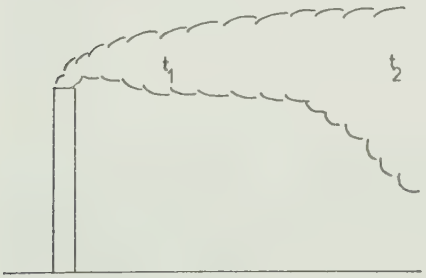
In Abbildung 19 ist ein Vertikalschnitt durch das berechnete Konzentrationsfeld in einer Entfernung von 7.5 km vom Quellort zu Beginn einer Fumigation-Situation wiedergegeben, bei der die atmosphärische Schichtung am Erdboden neutral ist und mit der Höhe kontinuierlich stabiler wird. Als Resultat ist eine stärkere Durchmischung im unteren Teil der Rauchfahne zu registrieren, die in diesem Bereich eine homogenere Konzentrationsverteilung bedingt, verbunden mit einer Erhöhung der Bodenkonzentration.



σ_z als Funktion der Höhe für x = 6000 m



Vertikalschnitt durch das Konzentrationsfeld zu Beginn einer Fumigation-Situation



Gestalt einer Rauchfahne zu Beginn einer Fumigation-Situation (der untere Bereich wird als neutral geschichtet angenommen)

Abb. 19: Der Einfluß einer vertikalen Änderung der atmosphärischen Stabilität auf die Konzentrationsverteilung in einer Rauchfahne.

4. SCHLUSSFOLGERUNGEN UND AUSBLICK

Ziel dieser Arbeit war es, ein physikalisch einfaches Konzept zu entwickeln, das es gestattet, den Einfluß horizontaler und vertikaler Variationen meteorologischer und topographischer Faktoren auf die Ausbreitung von Luftbeimengungen zu untersuchen. Die Anwendung dieses Verfahrens auf Dispersionsprozesse in zum Teil recht kompliziert strukturierten Grenzschichten erlaubt zweierlei Aussagen:

1.) die berechneten Konzentrationsfelder zeigen in der Tat jene Effekte, die aus der Kenntnis der jeweiligen Struktur dieser Grenzschicht heraus zu erwarten sind; qualitativ können die Ergebnisse demnach in ihren Tendenzen als richtig bezeichnet werden;
2.) quantitative Aussagen setzen einerseits das Vorhandensein geeigneter Dispersionsparameter und andererseits die Durchführung detaillierter Konzentrationsmessungen zur Modellverifikation voraus.

Die Verknüpfung dieser beiden letzteren Gesichtspunkte ist bislang - wie in Kapitel 3.3.3 erläutert - dadurch gegeben, daß die gewöhnlich verwendeten Dispersionsparameter aus Messungen des Bodenkonzentrationsfeldes unter Zugrundelegung GAUSSscher Verteilungen für eine homogene Ausbreitungsschicht ermittelt wurden. Die empirisch gewonnenen Standardabweichungen enthalten demnach implizit ein vertikal über die gesamte Ausbreitungsschicht gemitteltes Verhalten der meteorologischen Variablen.

Für weitergehende Untersuchungen resultiert daraus die Forderung nach

1.) einer dem Verfahren angepaßten Bestimmung der Dispersionsparameter,
2.) einer Sensitivitätsanalyse, mit deren Hilfe der Einfluß aller, die Struktur der Grenzschicht kennzeichnenden Faktoren auf das Bodenkonzentrationsfeld und auf die Dispersionsparameter erfaßt werden kann.

Das sind zwei Aufgabenstellungen, die zum einen eine Verbesserung des hier vorgeschlagenen Verfahrens und zum anderen eine Vertiefung der Kenntnisse über Dispersionsprozesse in der planetarischen Grenzschicht zur Folge haben würden. Und hier ist auch ein Ansatzpunkt zu sehen zur Beantwortung der eingangs gestellten Frage nach denjenigen atmosphärischen scales, die für die Ausbreitung von Luftbeimengungen von entscheidender Bedeutung sind.

Darüber hinausgehend eröffnet sich ein weites Feld interessanter Probleme beim Übergang vom hier diskutierten Ein-Quellen-Fall zu einem Viel-Quellen-Modell: Wie wirkt sich die Existenz kompliziert strukturierter Ausbreitungsschichten (z. B. Talkessellagen oder Zirkulationssysteme als Resultat des Wärmeinseleffektes) auf die Konzentrationsverteilung von Luftbeimengungen in einem Stadtgebiet aus? Welche Unterschiede bestehen im Vergleich zu den durch GAUSSsche plume- oder integrierte puff-Modelle berechneten Feldern?

Zur Klärung derartigen Fragen sollte der Versuch einer konkreten Anwendung des hier entwickelten Verfahrens unternommen werden, weil es

- im Sinne des in der Einleitung formulierten Leitgedankens - die für die Behandlung komplexer Ausbreitungsprobleme erforderliche Berücksichtigung der Physik der planetarischen Grenzschicht und der Wirkung topographischer Faktoren gestattet.

Herrn Prof. Dr. H. FORTAK danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für sein stets förderndes Interesse.

LITERATURVERZEICHNIS

BLACKADAR, A.K. (1962). The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. J. Geophys. Res. 67, 3095 - 4001

ELLISON, Th. (1956). Atmospheric turbulence. In: Surveys in Mechanics, G.I. TAYLOR 70th Anniversary Volume, pp. 400 - 430

FORTAK, H. Vorlesungen über theoretische Meteorologie. Veröff. des Instituts für Theor. Meteorologie der Freien Universität Berlin

FORTAK, H. (1966). Rechnerische Ermittlung der SO_2-Grundbelastung aus Emissionsdaten. Veröff. des Instituts für Theor. Meteorologie der Freien Universität Berlin

FORTAK, H. (1968). Die Methode der Filteranalyse in der atmosphärischen Energetik. 2. SPAAZ-Seminar, 17.-19.6.1968 in Berlin

FORTAK, H. (1969). Bodenimmissionsverteilungen im Lee eines Schornsteins für den Fall beliebiger Formen der Rauchfahnenachse. Veröff. des Instituts für Theor. Meteorologie der Freien Universität Berlin

GRIESSEIER, H. (1969). Über die äquatoriale Unstetigkeit des Ablenkungswinkels im geostrophisch-antitriptischen Windfeld. Acta Hydrophysica 14, 95 - 106.

HINO, M. (1968). Computer experiment on smoke diffusion over a complicated topography. Atm. Environment 2, 541 - 558

JAHNKE, E., EMDE, F. (1945). Tables of functions with formulae and curves; 4. Auflage, Dover Publ.

KLUG, W. (1968). Ein Verfahren zur Bestimmung der Ausbreitungsbedingungen aus synoptischen Beobachtungen. Veröff. des Instituts für Meteorologie der TH Darmstadt (siehe auch Staub-Reinhaltung der Luft 29, 143 - 147)

LETTAU, H.H. (1967). Small to large-scale features of boundary layer structure over mountain slopes. In: Proc. of the Symp. on Mountain Meteorology, 26. June 1967 (edited by E. R. REITER and J. L. RASMUSSEN).

MAHONEY, J. R. (1970). Models for the prediction of air pollution. Report for the Organization for Economic Cooperation and Development (OECD), Paris

McCORMICK, R.A., GUTSCHE, B. (1969). Meteorologie der Luftbeimengungen. Veröff. des Instituts für Theor. Meteorologie der Freien Universität Berlin (eine erweiterte englische Fassung erscheint bei Academic Press)

ROBERTS, J.J., CROKE, E.J., KENNEDY, A.S. (197o). An urban atmospheric dispersion model. Kap. 6 in STERN (197o)

SHIEH, L.J., DAVIDSON, B., FRIEND, J.P. (197o). A model of diffusion in urban atmospheres : SO_2 in Greater New York. Kap. 1o in STERN (197o)

SINGER, I.A., SMITH, M.E. (1966). Atmospheric dispersion at Brookhaven National Laboratory. Int. J. Air Water Poll. 1o, 125 - 135

STERN, A.C. (197o) (Editor). Proceedings of Symposium on Multiple-Source Urban Diffusion Models. Air Poll. Control Office Publication No. AP-86

SUTTON, O.G. (1953). Micrometeorology. McGraw-Hill Book Company; New York, Toronto, London

UHDE, K. (1964). Spezielle Funktionen der mathematischen Physik. Bibl. Institut, Mannheim

WIPPERMANN, F. (1966). On turbulent diffusion in an arbitrarily stratified atmosphere. J. Appl. Met. 5, 64o - 645

WIPPERMANN, F. (1972). Neuere Ergebnisse zur Parametrisierung von Grenzschichteffekten. Vortrag auf dem 6. SPAAZ-Seminar, 15.-18.5.1972 in Leoni

YORDANOV, D. (1968). On some asymptotic formulae describing diffusion in the surface layer of the atmosphere. Atm. Environment 2, 167 - 18o

YOSHIKAWA, T. (1972). Eine angenäherte Beschreibung der Luftströmung über dem Gebirge unter Berücksichtigung thermischer Effekte. Unveröffentlichter Arbeitsbericht, Institut für Theor. Meteorologie der Freien Universität Berlin

LEBENSLAUF

Ich wurde am 21. Oktober 1941 als Sohn des Lehrers Werner Gutsche und seiner Frau Dorothea, geborene Feuerstein, in Berlin-Buckow geboren. Von 1948 bis 1952 besuchte ich die Volksschule in Bad Sassendorf, von 1952 bis 1961 das mathematisch-naturwissenschaftliche Aldegrever-Gymnasium in Soest, wo ich am 1. März 1961 die Reifeprüfung ablegte. Wegen meiner vorwiegend naturwissenschaftlichen Interessen nahm ich im Sommersemester 1961 das Studium der Physik und Mathematik an der Freien Universität Berlin auf und schloß es am 21. Dezember 1967 mit dem Diplom in Physik ab. Meine Diplomarbeit befaßte sich mit der Struktur eines ebenen stationären Verdichtungsstoßes in einatomigen neutralen Gasen und wurde von Herrn Prof. Dr. H. Fortak und Herrn Prof. Dr. F. Penzlin betreut.

Seit dem 1. März 1968 arbeite ich als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Theoretische Meteorologie unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H. Fortak an einem von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsvorhaben.